

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα επιθυμούσα αρχικά να εκφράσω τις θερμότερες ευχαριστίες μου και την απεριόριστη εκτίμησή μου στον καθηγητή μου Νίκο Καλουπτσίδη. Ο κ. Καλουπτσίδης, με την αμεσότητά του, τη βαθιά γνώση των θεμάτων της επεξεργασίας σήματος και την ιδιαίτερα ανεπτυγμένη διαίσθησή του ήταν για μένα μεγάλος δάσκαλος. Υπήρξε μια ανεξάντλητη πηγή συμβουλών και προτάσεων, κατηύθυνε τη διατριβή μου και με βοήθησε να ανταπεξέλθω στις δυσκολίες που παρουσιάστηκαν κατά την εκπόνησή της. Τον ευχαριστώ πάρα πολύ για την εμπιστοσύνη με την οποία με περιέβαλε, για τις άριστες σχέσεις που αναπτύχθηκαν μεταξύ μας και για τις δυνατότητες που μου έδωσε να ασχοληθώ κοντά του με πολλά και ενδιαφέροντα θέματα. Θεωρώ τον εαυτό μου εξαιρετικά τυχερό που υπήρξα μαθητής του και συμμετείχα στην ερευνητική του ομάδα και είμαι σίγουρος πως η διατριβή αυτή δεν θα είχε πραγματοποιηθεί χωρίς τη δική του συμβολή.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής μου επιτροπής, τον καθηγητή κ. Κ. Χαλάτση και την επίκουρο καθηγήτρια κ. Μ. Γρηγοριάδου για τις χρήσιμες συμβουλές και τη βοήθεια που μου προσέφεραν. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές κ.κ. Π. Μαραγκό, Στ. Θεοδωρίδη, Ι. Ευδοκιμίδα και Εμ. Σαγκριώτη, που μου έκαναν την τιμή να είναι μέλη της επταμελούς εξεταστικής μου επιτροπής.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες θα πρέπει να απευθύνω στους ιατρούς νευρολόγους του Αιγινήτειου Νοσοκομείου κ.κ. Γκατζώνη Στυλιανό, που ήταν ο πρώτος ιατρός με τον οποίο συνέρχαστηκα, Ευδοκιμίδα Ιωάννη, Σμυρνή Νίκο και Γουρτζελίδα Παύλο, για τη βοήθεια που μου προσέφεραν και για τις πάρα πολύ ενδιαφέρουσες συζητήσεις που κάναμε και κάνουμε για την ανάλυση των εγκεφαλογραφημάτων και το νευροφυσιολογικό τους υπόβαθρο.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης το Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών του Πανεπιστημίου Αθηνών για τα μέσα και την υποστήριξη που μου παρείχε για την εκπόνηση της διατριβής.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους δασκάλους μου, από τα πρώτα μαθητικά μου χρόνια στο Αργοστόλι μέχρι και το Πανεπιστήμιο, για την προσπάθειά τους να με διαπαιδαγωγήσουν, να με μορφώσουν και να μου μεταφέρουν τις γνώσεις και την εμπειρία τους.

Κατά τη διάρκεια των σπουδών μου στο Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών του Πανεπιστημίου Αθηνών είχα την ευκαιρία να γνωρίσω και να συνεργαστώ με κάποιους ανθρώπους, τη βοήθεια των οποίων στην προσπάθειά μου θεωρώ πολύ σημαντική. Θα επιθυμούσα να μνημονεύσω τους διδάκτορες του Πανεπιστημίου Αθηνών Χ. Γεωργουλάκη, Β. Γκεζερλή, Σ. Κώτσιο, Π. Κουκουλά, Κ. Κουτρούμπα, Ε. Κοφίδη, Α. Ροντογιάννη και Β. Τσούλκα καθώς και τους υποψήφιους διδάκτορες και μεταπτυχιακούς φοιτητές Γ. Ασημακόπουλο, Α. Βασιλαράκου, Γ. Γκατ, Γ. Καπογιαννόπουλο, Ν. Κολοκοτρώνη, Ν. Κουτσούλη, Γ. Κοφίνη, Α. Πικράκη, Μ. Πουλιάκη, Π. Ρυζομιλιώτη και Ν. Σκλάβο.

Ο αδελφός μου Γεράσιμος στάθηκε δίπλα μου και μοιράστηκε τις αγωνίες και ανησυχίες μου, γι' αυτό και τον ευχαριστώ θερμά. Με βοήθησε επίσης σε δύσκολες στιγμές, όταν η αφοσίωση στη διατριβή μου με έκανε να παραμελήσω άλλες ασχολίες και υποχρεώσεις μου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω μέσα από την καρδιά μου τη Δέσποινα Γαλιατσάτου για την αγάπη, την κατανόηση και τη συμπαράστασή της. Θεωρώ τη βοήθειά της ιδιαίτερα καθοριστική στις

τελευταίες φάσεις της προσπάθειάς μου.

Η διατριβή αυτή αφιερώνεται στους γονείς μου, Σπύρο και Εγνεσία, σαν ελάχιστο δείγμα αγάπης και ευγνωμοσύνης. Τους ευχαριστώ από τα βάθη της καρδιάς μου γιατί μου έδειξαν το δρόμο της γνώσης και μου συμπαραστάθηκαν ηθικά και υλικά σε όλη τη μέχρι τώρα ζωή μου. Ελπίζω να ανταποκρίθηκα στις προσδοκίες τους αν και πιστεύω πως δύσκολα ποτέ θα ξεπληρώσω ένα ελάχιστο έστω μέρος της προσφοράς τους σε μένα.

Δ. Λιναρδάτος

Περιεχόμενα

I	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
1	Εισαγωγή	2
2	Το Ηλεκτροεγκεφαλογραφικό Σήμα	5
2.1	Γενικά	5
2.2	Ο εγκέφαλος	6
2.3	Ηλεκτροεγκεφαλογραφική δραστηριότητα	7
2.4	Καταγραφή ΗΕΓ σημάτων	8
2.4.1	Χωρική ανάλυση	10
2.5	Δυσκολίες στην ποσοτικοποίηση των εγκεφαλογραφικών καταγραφών	11
II	ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ	13
3	Δυναμικά Συστήματα	14
3.1	Εισαγωγικές έννοιες	14
3.2	Ελκυστές	16
3.3	Διακλαδώσεις (bifurcations)	18
3.4	Τομή Poincare	18
3.5	Εννοιολογικές συνέπειες του ντετερμινιστικού χάους	19
4	Ανακατασκευή Φασικού Χώρου	20
4.1	Το Θεώρημα Εμβάπτισης του Takens	21
4.2	Εμβάπτιση χρόνου	24
4.3	Προσδιορισμός της χρονικής καθυστέρησης	24
4.3.1	Αμοιβαία πληροφορία	25
4.3.2	Μέθοδος Rosenstein	26
4.4	Προσδιορισμός της διάστασης εμβάπτισης	27
4.4.1	Εσφαλμένα πλησιέστεροι γείτονες	27
4.4.2	Άλλες μέθοδοι προσδιορισμού της διάστασης εμβάπτισης	29
5	Αναλλοίωτα Μεγέθη της Κίνησης	31
5.1	Γενικά	31
5.2	Διαστάσεις φράκταλ	32

5.2.1	Διάσταση καταμέτρησης κύβων: D_0	33
5.2.2	Διάσταση πληροφορίας : D_1	34
5.2.3	Διάσταση συσχετισμού : D_2	34
5.2.4	Διόρθωση Theiler	35
5.3	Υπολογισμός της διάστασης συσχετισμού	36
5.3.1	Αλγόριθμοι υπολογισμού της συνάρτησης συσχετισμού	36
5.3.2	Εκτιμητές της διάστασης συσχετισμού	37
5.4	Εκθέτες Lyapunov	40
5.4.1	Καθορισμός του φάσματος των εκθετών Lyapunov	42
5.4.2	Αλγόριθμος του Wolf	44
5.4.3	Αλγόριθμος του Frank	46
5.4.4	Αλγόριθμος του Rosenstein	46
5.4.5	Αλγόριθμος των Sano και Sawada	47
5.4.6	Αλγόριθμος του Eckmann	47
5.4.7	Αλγόριθμος του Brown	48
5.5	Συγκριτική μελέτη των αλγορίθμων υπολογισμού των εκθετών Lyapunov	48
5.5.1	Αποτελέσματα	48
5.5.2	Συμπεράσματα	55
6	Ανίχνευση Μη Γραμμικότητας	56
6.1	Πεπερασμένη διάσταση από στοχαστικές διαδικασίες	56
6.2	Η μέθοδος των δεδομένων αντικατάστασης	58
6.2.1	Υπολογισμός σημαντικότητας	58
6.2.2	Ιεραρχία μηδενικών υποθέσεων	59
6.2.3	Στατιστικές διαχωρισμού	60
6.3	Αλγόριθμοι παραγωγής δεδομένων αντικατάστασης	60
6.3.1	Αλγόριθμος FT χωρίς τη χρήση παραθύρου	61
6.3.2	Αλγόριθμος FT με τη χρήση παραθύρου	61
6.3.3	Αλγόριθμος Fourier με τροποποίηση πλατών	61
7	Ανάλυση Εγκεφαλογραφήματος	63
7.1	Γενικά	63
7.2	Υλικό και μέθοδος	64
7.2.1	Συμμετέχοντες και συλλογή δεδομένων	64
7.2.2	Ανακατασκευή του φασικού χώρου	66
7.2.3	Υπολογισμός των μη γραμμικών μεγεθών D_2 και C_{r1}	66
7.2.4	Υπολογισμός του γραμμικού μεγέθους P_{alpha}	67
7.2.5	Παραγωγή των δεδομένων αντικατάστασης	67
7.2.6	Ανάλυση διασπορών ANOVA	68
7.2.7	Προσδιορισμός των προτύπων των κλάσεων	69
7.2.8	Ταξινόμηση των συμμετεχόντων	69
7.3	Αποτελέσματα	69

7.4	Σχολιασμός αποτελεσμάτων	75
III ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ		79
8	Έλεγχος Παρουσίας Μη Γραμμικοτήτων στο Η.Ε.Γ.	80
8.1	Γραμμικά αυτοπαλινδρούμενα μοντέλα (LAR)	80
8.2	Μη γραμμικά αυτοπαλινδρούμενα μοντέλα (NLAR)	81
8.3	Μη γραμμική ανάλυση	81
8.4	Έλεγχοι κανονικότητας - γραμμικότητας	82
8.5	Υλικό	82
8.6	Αποτελέσματα	83
8.6.1	Γραμμικά αυτοπαλινδρούμενα μοντέλα	83
8.6.2	Μη γραμμικά αυτοπαλινδρούμενα μοντέλα	83
8.6.3	Μη γραμμική ανάλυση	83
8.6.4	Έλεγχοι κανονικότητας - γραμμικότητας	85
8.6.5	Συμπεράσματα	85
9	Μη Γραμμικοί Καταχωρητές Ολίσθησης Με Ανάδραση	88
9.1	Γενικά	88
9.2	Κανονική Αναπαράσταση	89
9.3	Ολική διάταξη κανονικών μορφών	92
9.3.1	Η συνάρτηση διάταξης	93
9.3.2	Διατύπωση Προβλήματος	95
9.4	Ο Προτεινόμενος Αλγόριθμος	96
9.4.1	Ενημέρωση του $T_{max}(u_i)$	97
9.4.2	Επέκταση του FIA αλγορίθμου	99
9.4.3	Έλεγχος ως προς το ελάχιστο	102
9.4.4	Η διατύπωση του αλγορίθμου	105
9.5	Σειριακός αλγόριθμος προσδιορισμού του καταχωρητή ελαχίστου κόστους	107
9.5.1	Συμπεράσματα	110
IV ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ ΓΑΜΜΑ ΖΩΝΗΣ ΠΡΟΚΛΗΤΩ- Ν ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ		112
10	Προκλητά Δυναμικά	113
10.1	Χαρακτηριστικά των ERP	113
10.2	Υπόδειγμα των προκλητών δυναμικών	116
10.3	Η μέθοδος της μέσης κυματομορφής	117
10.3.1	Απόρριψη παρασίτων	119
10.4	Μέθοδοι ανάλυσης μονήρων προκλητών δυναμικών	120
10.5	Σύγκριση της μεθόδου της μέσης κυματομορφής με εναλλακτικές μεθόδους	120

10.6 Γνωστικά Σήματα	121
10.6.1 Βασικές υποθέσεις για την εφαρμογή της μεθόδου των προκλητών δυναμικών	122
10.6.2 Μεθοδολογικές απαιτήσεις	123
11 Μη Γραμμικός Ενεργειακός Τελεστής	125
11.1 Ορισμοί	125
11.2 Στατιστική Ερμηνεία	126
12 Ανάλυση Πακέτων Κυματιδίων	128
12.1 Εισαγωγή	128
12.1.1 Κυματίδια και Χρονοσυχνοτική Ανάλυση	129
12.1.2 Βάσεις Κυματιδίων	129
12.2 Κυματίδια	129
12.2.1 Ανάλυση κυματιδίων	130
12.3 Πακέτα Κυματιδίων	131
12.3.1 Ανάλυση πακέτων κυματιδίων	132
13 Μελέτη δραστηριότητας 40Hz	134
13.1 Δραστηριότητα 40Hz	134
13.2 Υλικό και μέθοδοι	135
13.3 Δραστηριότητα 40Hz ως προς το ερέθισμα	138
13.3.1 Δραστηριότητα 40Hz ως προς την κίνηση	143
13.4 Ανάλυση αποτελεσμάτων	145
V ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	148
14 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	149

Κατάλογος Πινάκων

2.1	Διαμήκες και οριζόντιο μοντάζ ηλεκτροδίων	11
5.1	Το φάσμα των εκθετών Lyapunov υπολογισμένο με βάση τον αλγόριθμο των Sano και Sawada ως συνάρτηση της διάστασης εμβάπτισης: Κανάλι: $P_z - C_z$, $t = T_{mut}$, $N = 15.000$, $d_a = 5.4$	54
5.2	Το φάσμα των εκθετών Lyapunov υπολογισμένο με βάση τον αλγόριθμο των Eckmann et al. ως συνάρτηση της διάστασης εμβάπτισης: Κανάλι: $P_z - C_z$, $t = T_{mut}$, $N = 15.000$, $d_a = 5.4$	54
5.3	Το φάσμα των εκθετών Lyapunov υπολογισμένο με βάση τον αλγόριθμο των Brown et al. ως συνάρτηση της διάστασης εμβάπτισης: Κανάλι: $P_z - C_z$, $t = T_{mut}$, $N = 15.000$, $d_a = 5.4$	55
7.1	Πρωτόκολλο επεξεργασίας του HEF σήματος	65
7.2	Πλήθος ζευγαριών των συμμετεχόντων με στατιστικά σημαντικές διαφορές ως προς τις τιμές των μεγεθών D_2 , C_{r1} και P_{alpha} για τους δεξιόχειρες και τους αριστερόχειρες	70
7.3	Μέσες τιμές των μεγεθών D_2 , C_{r1} και P_{alpha} για όλες τις απαγωγές των δεξιόχειρων και αριστερόχειρων.	71
7.4	Πρότυπα δεξιόχειρων με βάση τη D_2	72
7.5	Πρότυπα αριστερόχειρων με βάση τη D_2	72
7.6	Αποτελέσματα της ταξινόμησης των συμμετεχόντων στις κλάσεις 1 και 2	74
7.7	Ποσοστά των εποχών για τις οποίες απορρίπτεται η αρχική υπόθεση της γραμμικότητας ($p < 0.05$)	75
8.1	Αποτελέσματα εφαρμογής των γραμμικών αυτοπαλινδρούμενων μοντέλων	83
8.2	Στατιστική σημαντικότητα των τιμών των μεγεθών D_2 και C_{r1}	85
8.3	Αποτελέσματα ελέγχων κανονικότητας - γραμμικότητας	85
9.1	Ολική διάταξη κόστους για την περίπτωση του παραδείγματος 2	95
9.2	Ενημέρωση του $T_{max}(u_i)$ (TmaxUpdate)	98
9.3	Ανάλυση του πίνακα $T_{max}(u_i)$ του Παραδείγματος 3	98
9.4	Επέκταση του Fundamental Iterative Algorithm (EFIA)	102
9.5	Σχήμα αποκωδικοποίησης του διανύσματος δομής (Decoder)	104
9.6	Ελεγχος ελαχίστου (Minimality check)	105
9.7	Ο μπλοκ αλγόριθμος σύνθεσης NLFSR	105
9.8	Ενημέρωση του $T_{max}(u_N)$	109

9.9	Ο σειριακός αλγόριθμος σύνθεσης NLFSR	110
13.1	Τα αποτελέσματα της Kruskal-Wallis ANOVA ανάλυσης για τις διαφορές μεταξύ της δραστηριότητας των $40Hz$ (πρώτη στήλη) και των ERP (δεύτερη στήλη) των κινήσεων για κάθε χρονικό παράθυρο (τιμές H και επίπεδο P), για το σύνολο των 6 ηλεκτροδίων που παρουσιάζουν σημαντική διαφορά με βάση την ανάλυση μεταθέσεων.	143

Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Οι λοβοί των ημισφαιρίων του εγκεφάλου α) από πάνω β) από πλάγια γ) από κάτω δ) από μέσα	6
2.2	α) Πηγές ρεύματος που σχηματίζουν ένα στρώμα διπόλων έχουν ως αποτέλεσμα τη δημιουργία κατανομής ρευμάτων που καθορίζεται από το στρώμα διπόλων και τις ιδιότητες αγωγής του κεφαλιού. β) Οι διάφορες συχνοτικές ζώνες του ΗΕΓ που παρουσιάζουν ενδιαφέρον τόσο κλινικό όσο και ερευνητικό. γ) Μερικές χαρακτηριστικές κυματομορφές και η αντίστοιχη ιατρική ορολογία.	7
2.3	Καταγραφή ΗΕΓ σήματος σύμφωνα με το 10 – 20 σύστημα	9
2.4	Το 10 – 20 σύστημα	10
5.1	Οι διαφορές της συνάρτησης συσχετισμού $DC(n)$ ως συνάρτηση του $r = n \cdot \Delta r$.	39
5.2	Η επίδραση των παραμέτρων των αλγορίθμων των Wolf et al. και Rosenstein et al. στην τιμή του μέγιστου εκθέτη Lyapunov (Διάσταση Εμβάπτισης: $m = 11$, Χρονική καθυστέρηση: $\tau = T_{mut}$, Πλήθος σημείων : $N = 15.000$)	49
5.3	Η επίδραση των παραμέτρων του αλγορίθμου των Frank et al. στην τιμή του μέγιστου εκθέτη Lyapunov (Διάσταση Εμβάπτισης: $m = 11$, Χρονική καθυστέρηση: $\tau = T_{mut}$, Πλήθος σημείων : $N = 15.000$)	50
5.4	Η επίδραση των παραμέτρων των αλγορίθμων των Sano-Sawada, Eckmann et al. και Brown et al. στο φάσμα Lyapunov (Διάσταση Εμβάπτισης: $m = 11$ -ειδικά για τον αλγόριθμο των Brown et al. $m = 8$, Χρονική καθυστέρηση: $\tau = T_{mut}$, Πλήθος σημείων : $N = 15.000$,)	51
5.5	Το φάσμα των εκθετών Lyapunov ως συνάρτηση του πλήθους σημείων της χρονοσειράς (Διάσταση Εμβάπτισης: $m = 11$, ειδικά για τον αλγόριθμο των Brown et al. $m = 8$, Χρονική καθυστέρηση: $\tau = T_{mut}$)	52
5.6	Το φάσμα των εκθετών Lyapunov ως συνάρτηση της χρονικής καθυστέρησης (Διάσταση Εμβάπτισης: $m = 11$, ειδικά για τον αλγόριθμο των Brown et al. $m = 8$, Πλήθος σημείων : $N = 15.000$)	53
5.7	Το φάσμα των εκθετών Lyapunov ως συνάρτηση της διάστασης εμβάπτισης (Χρονική καθυστέρηση: $\tau = T_{mut}$), Πλήθος σημείων $N = 15.000$	54
7.1	Η συνάρτηση συσχετισμού $C_m(r)$ σε $\log - \log$ κλίμακα μιας εποχής που αντιστοιχεί στο ηλεκτρόδιο C_z του δεξιόχειρα Σ.Φ. για διαστάσεις εμβάπτισης $m = 5 - 15$. .	67
7.2	α) Τμήμα διάρκειας 8sec μιας αρχικής χρονοσειράς που αντιστοιχεί στο ηλεκτρόδιο C_z του δεξιόχειρα Σ.Φ. β) Μία σειρά δεδομένων αντικατάστασης που αντιστοιχεί στο σήμα του σχήματος α. γ) Η φασματική ισχύς του αρχικού σήματος α. δ) Η φασματική ισχύς της σειράς δεδομένων αντικατάστασης του β. Οι κατακόρυφες εστιγμένες γραμμές ορίζουν την άλφα ζώνη.	68

8.1	Ανάλυση υπολοίπων	84
8.2	Μέσο τετραγωνικό σφάλμα της πρόβλεψης p δειγμάτων από ένα LAR τάξης 15	84
8.3	Μέσο τετραγωνικό σφάλμα της πρόβλεψης p δειγμάτων με χρήση του NLAR που προέκυψε από την προσθήκη τετραγωνικού όρου στο LAR του Σχήματος 6.	85
8.4	Ολοκλήρωμα συσχετισμού για μια εποχή φυσιολογικού HEF και των αντιστοίχων δεδομένων αντικατάστασης. Ισχύει $SD_2 < 4$	86
8.5	Ολοκλήρωμα συσχετισμού για μια εποχή που αντιστοιχεί σε κρίση και των αντιστοίχων δεδομένων αντικατάστασης. Ισχύει $SD_2 > 4$	86
9.1	Η γενική αρχιτεκτονική NLFSR καταχωρητών που βασίζεται στην κανονική αναπαράσταση	90
9.2	Η αρχιτεκτονική του μη γραμμικού καταχωρητή ολίσθησης με ανάδραση του Παραδείγματος 1.	91
9.3	Η δομή του προτεινόμενου αλγορίθμου	96
9.4	Η δομή του ελέγχου ελαχίστου	103
10.1	Παράδειγμα μέσης VEP κυματομορφής που αντιστοιχεί στο ηλεκτρόδιο P_z . Η διέγερση εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή $t = 1s$	114
12.1	symlet τάξεως $N = 4$	130
12.2	Διακριτός μετασχηματισμός κυματιδίων	131
12.3	Ανάλυση με χρήση πακέτων κυματιδίων	132
12.4	Πλήρης βάση των πακέτων κυματιδίων	133
13.1	Κατανομή χρόνων απόκρισης : Α) Προσακκαδική κίνηση Β) Αντισακκαδική κίνηση. Η κατακόρυφη γραμμή αναπαριστά το χρονικό διάστημα των $350msec$ μετά την εμφάνιση του περιφερειακού στόχου στο οποίο πραγματοποιήθηκε η ανάλυση των καταγραφών.	136
13.2	Αποτελέσματα μεταθέσεων. Το σχήμα παρουσιάζει την πιθανότητα η απόλυτη διαφορά της δραστηριότητας στους $40Hz$ μεταξύ των προσπαθειών προσακκαδικών κινήσεων και καμίας κίνησης μετά από N μεταθέσεις, να είναι μεγαλύτερη από την πραγματική διαφορά για τη συνολική δραστηριότητα στους $40Hz$ για το ηλεκτρόδιο CP_4 . Από το σχήμα προκύπτει ότι μετά από 500 μεταθέσεις, η πιθανότητα αυτή γίνεται μικρότερη από 0.01 και μετά τις 1000 μεταθέσεις σταθεροποιείται.	137
13.3	ERP και δραστηριότητα $40Hz$ ως προς το ερέθισμα. Απεικονίζονται ο συνολικός μέσος όρος των ERP (εστιγμένη γραμμή) και η δραστηριότητα των $40Hz$ (συνεχής γραμμή) για όλα τα ηλεκτρόδια. Οι κυματομορφές των ERP είναι σχεδιασμένες σε μV και η δραστηριότητα των $40Hz$ σχεδιάζεται σε τιμές ενέργειας (μV^2). Ο συνολικός χρόνος μετά την εμφάνιση του περιφερειακού στόχου (γεγονός που σημειώνεται με την κάθετη γραμμή) είναι $350msec$. Α: Προσακκαδική κίνηση, Β: Αντισακκαδική κίνηση και C: Καμία κίνηση	139

- 13.4 Η συνολική μέση δραστηριότητα των $40Hz$ για τα τρία είδη κινήσεων (η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί στην προσακκαδική κίνηση, η λεπτή γραμμή αντιστοιχεί στην αντισακκαδική και η εστιγμένη γραμμή στην καμία κίνηση), για τρία ηλεκτρόδια σε κάθε ζώνη συχνοτήτων: Α: ζώνη $25 - 31.25Hz$ Β: ζώνη $31.25 - 37.5Hz$ C: ζώνη $37.5 - 43.75Hz$ και D: ζώνη $43.75 - 50Hz$. Η δραστηριότητα σχεδιάζεται σε μV^2 . Ξεκάθαρη διαφοροποίηση μεταξύ των τριών ειδών κινήσεων παρατηρείται στη ζώνη $37.5 - 43.75Hz$ (ζώνη $40Hz$). Η κορύφωση της δραστηριότητας στα $100msec$ για την προσακκαδική κίνηση είναι μεγαλύτερη από ό,τι για την αντισακκαδική και την καμία κίνηση. Διαφοροποίηση, αλλά μικρότερη, εμφανίζεται επίσης στη ζώνη $43.75 - 50Hz$. Στις χαμηλότερες ζώνες συχνοτήτων η δραστηριότητα στα $100msec$ είναι πολύ μικρή και δεν παρατηρούνται διαφορές μεταξύ των τριών ειδών κινήσεων. 140
- 13.5 Η δραστηριότητα των $40Hz$ για κάθε συμμετέχοντα υπολογισμένη από τη μέση ER-P κυματομορφή που αντιστοιχεί στο ηλεκτρόδιο C_2 . Η δραστηριότητα των $40Hz$ σχεδιάζεται σε μV^2 . Οι συμμετέχοντες S1 έως και S4 παρουσιάζουν σαφή αύξηση της ενεργοποίησης στα $100ms$ (γχρι λωρίδα) μετά την εμφάνιση του οπτικού ερεθίσματος για την προσακκαδική κίνηση (συνεχής γραμμή) σε σύγκριση με την αντισακκαδική κίνηση (λεπτή γραμμή) και την καμία κίνηση (εστιγμένη γραμμή). Για τον S5 η δραστηριότητα της προσακκαδικής και αντισακκαδικής κίνησης είναι περίπου ίδιες και μεγαλύτερες από αυτή της καμίας κίνησης. Για τον S6 η δραστηριότητα της αντισακκαδικής κίνησης είναι μεγαλύτερη από αυτή της προσακκαδικής και της καμίας κίνησης. Η δραστηριότητα στα $100ms$ των συμμετεχόντων S5 και S6 είναι μικρότερη από αυτή των άλλων τεσσάρων συμμετεχόντων. 141
- 13.6 Οι διαφορές ανάμεσα στα είδη των κινήσεων. Η σειρά των σχεδίων αποτελεί γραφική αναπαράσταση των τιμών πιθανότητας (P) η διαφορά στη δραστηριότητα των $40Hz$ μεταξύ των ειδών κίνησης που προκύπτει για τα δεδομένα μετά από την ανάλυση μεταθέσεων για κάθε χρονικό παράθυρο να είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη πραγματική διαφορά. Κάθε σχήμα αποτελεί απεικόνιση αυτών των πιθανοτήτων για τα 25 ηλεκτρόδια χρησιμοποιώντας μία διαδικασία απεικόνισης για καλύτερα οπτικά αποτελέσματα. Α: Διαφορά προσακκαδικής και αντισακκαδικής. Β: Διαφορά αντισακκαδικής και καμίας κίνησης. C: Διαφορά αντισακκαδικής και καμίας κίνησης. Σημαντική διαφορά ($P < 0.01$) που ξεκινά ακόμη από τα $50msec$ μετά την εμφάνιση του περιφερειακού στόχου και η οποία κορυφώνεται στα $100msec$ είναι εμφανής στη σειρά Α και ακόμη περισσότερο εμφανής στη σειρά Β. 142
- 13.7 Δραστηριότητα των $40Hz$ ως προς την έναρξη της κίνησης. Απεικονίζεται η συνολική δραστηριότητα των $40Hz$ για την προσακκαδική κίνηση (παχιά γραμμή) και την αντισακκαδική κίνηση (λεπτή γραμμή) για τα 25 ηλεκτρόδια. Η δραστηριότητα των $40Hz$ σχεδιάζεται σε μV^2 . Είναι ευθυγραμμισμένη ως προς την έναρξη της κίνησης (δεξιά κάθετη γραμμή) και ο συνολικός χρόνος είναι $350msec$. Στο κάτω μέρος του σχήματος ξανασχεδιάζεται σε μεγέθυνση η δραστηριότητα των $40Hz$ για το ηλεκτρόδιο C_z 144

Μέρος Ι

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Ο επιστημονικός κλάδος της Επεξεργασίας Σήματος έχει συνεισφέρει τα μέγιστα στην πρόοδο και ανάπτυξη των άλλων επιστημονικών κλάδων που έχουν ως αντικείμενο τη μελέτη διαφόρων συστημάτων και φαινομένων, καθώς προσφέρει το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο αλλά και τα εργαλεία για την ανάλυση, επεξεργασία και εξαγωγή της πληροφορίας που περιέχουν τα σήματα που καταγράφονται από τα συστήματα αυτά. Ένας από τους επιστημονικούς κλάδους που χρησιμοποιεί τις μεθόδους και τις τεχνικές της Επεξεργασίας Σήματος είναι και η Ηλεκτροεγκεφαλογραφία. Η Ηλεκτροεγκεφαλογραφία έχει μια ιστορία αρκετών ετών στη διάρκεια των οποίων έγιναν σημαντικά βήματα στη μελέτη και ανάλυση των εγκεφαλογραφικών σημάτων. Στόχος της μελέτης αυτής αποτελεί η ανάδειξη πληροφοριών που θα συνεισφέρουν τόσο στην κατανόηση της φυσιολογικής λειτουργίας του ανθρώπινου εγκεφάλου όσο και στην κατανόηση και έγκαιρη διάγνωση των δυσλειτουργιών και παθολογικών καταστάσεων. Η προσπάθεια έχει αποδώσει καρπούς και μέχρι σήμερα έχουμε μάθει αρκετά, ωστόσο πολλά περισσότερα είναι αυτά που πρέπει να γίνουν ακόμη για να κατανοήσουμε τα 'μυστικά' του εγκεφάλου. Για την επίτευξη του στόχου αυτού απαιτείται η συνεχής, πολύπλευρη και αποτελεσματική συνεργασία πολλών κλάδων της επιστήμης μεταξύ των οποίων εκτός από την ιατρική συμπεριλαμβάνονται η βιο-μηχανική, η επεξεργασία σήματος, η φυσική, η πληροφορική, η βιολογία κλπ. Ο κλάδος της επεξεργασίας σήματος αποτελεί εξαιρετικά σημαντικό κλάδο της επιστήμης στην κατεύθυνση αυτή. Η συνεργασία της με την εγκεφαλογραφία είναι καθοριστική για την αποκρυπτογράφηση της πληροφορίας που φέρουν τα εγκεφαλογραφικά σήματα.

Τα βιολογικά συστήματα, όπως η καρδιά και ο εγκέφαλος, εμφανίζουν σε μεγάλο βαθμό μη κανονικότητα, η οποία θεωρείται υπεύθυνη για τη μη εμφάνιση ανωμαλιών που θα δυσχέραιναν τη λειτουργία των ζωτικών αυτών οργάνων του ανθρώπινου οργανισμού. Έτσι, η μη κανονικότητα που σχετίζεται με μη γραμμικά ίσως και χαοτικά φαινόμενα, οδηγεί μεν σε πολύπλοκα συστήματα, ωστόσο αυτό δεν σημαίνει ότι πρόκειται για τέλεια αταξία αλλά, αντιθέτως, θα έλεγε κανείς ότι η μη κανονικότητα είναι σύμφυτη με τη ζωή και τη νοημοσύνη. Κατά τον Prigogine, "ο εγκέφαλος έχει επιλεγεί να είναι τόσο ασταθής, ώστε η παραμικρή επίδραση να μπορεί να οδηγεί στο σχηματισμό τάξης". Για τον εγκέφαλο η μη κανονικότητα φαίνεται ότι είναι εντελώς φυσιολογική, ενώ η υπερβολική τάξη είναι καταστρεπτική.

Οι μέθοδοι επεξεργασίας σήματος που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση των σημάτων που καταγράφονται από τον εγκέφαλο, συμπεριλαμβάνουν όλες τις μεθόδους από τις πιο κλασικές μέχρι και τις πιο μοντέρνες, από τις πιο παλιές μέχρι και τις πιο πρόσφατες, από τις πιο απλές μέχρι και τις πιο προχωρημένες, από τις γραμμικές μέχρι τις μη γραμμικές. Μέχρι σήμερα έχουν αναπτυχθεί και εφαρμοστεί μοντέλα για την περιγραφή του ηλεκτροεγκεφαλογραφικού σήματος και μοντέλα για τον τρόπο παραγωγής των διαφόρων ρυθμών του. Μεταξύ άλλων, έχει αναζητηθεί η ύπαρξη νομοτέλειας ή τυχαιότητας, έχουν προταθεί διαγνωστικές τεχνικές καθώς και μέθοδοι

υπολογισμού της θέσης των πηγών που παράγουν τη δραστηριότητα αυτή και έχει μελετηθεί η ακολουθία των νευρωνικών εκφορτίσεων. Για παράδειγμα, ένα από τα μέσα για την κατανόηση της λεπτεπίλεπτης ισορροπίας μεταξύ τάξης και μη κανονικότητας του εγκεφάλου αποτελεί και η μέθοδος της μη γραμμικής ανάλυσης, η οποία επιτρέπει στους επιστήμονες να αναλύουν ηλεκτρο-εγκεφαλογραφήματα (HEG) με μεγαλύτερη ευχέρεια. Μερικοί επιστήμονες χρησιμοποιούν αυτές τις τεχνικές για να αναζητήσουν παράξενους ελκυστές. Η Α. Babloyantz [7], το 1986, σημείωσε ότι τα γραφήματα ανακατασκευής στο χώρο των καταστάσεων είχαν πολλά κοινά γνωρίσματα με τα φράκταλ και αποφάσισε να μετρήσει τις φράκταλ διαστάσεις που παράγει ο εγκεφάλος, αρχικά κατά την επιληψία και αργότερα κατά τα διάφορα στάδια του ύπνου, πιστεύοντας πως η φράκταλ διάσταση των παράξενων ελκυστών του εγκεφάλου θα μπορούσε να προσφέρει ένα μέτρο του βάθους των σταδίων του ύπνου.

Από πρακτική και στρατηγική άποψη, ο εγκεφάλος μπορεί να θεωρηθεί ως μια διακριτή κατάσταση της ύλης, όπως η στερεά, η υγρή, η αέρια και το πλάσμα, με τις ιδιότητές της σε διάφορες χωρικές και χρονικές κλίμακες υποκειμένες στη θεωρητική περιγραφή και τις μετρήσεις του Η-ΕΓ. Η αισιόδοξη αυτή θεώρηση από πολλούς δεν θεωρείται σύμφωνη με τις παρατηρήσεις της πολυπλοκότητας που εμφανίζει ακόμη και ένας μόνο νευρώνας. Ένα σύστημα που περιέχει 10^{10} αλληλεπιδρώντες νευρώνες σίγουρα εμφανίζεται πολύπλοκο. Ωστόσο, ένας λόγος αισιοδοξίας πηγάζει από το γεγονός ότι τα HEG δεδομένα είναι διαθέσιμα σε επίπεδο περιοχής του φλοιού (η οποία τυπικά περιλαμβάνει δεκάδες ή εκατοντάδες τετραγωνικά εκαστοτά επιφάνειας). Έτσι, θεωρείται δυνατή η περιγραφή της εγκεφαλικής δυναμικής σε μεγάλη κλίμακα που συμπεριλαμβάνει την αλληλεπίδραση μαζών νευρώνων.

Ο εγκεφάλος αντιμετωπίζεται σαν ένα πολύπλοκο φυσικό σύστημα με το HEG να αποτελεί τη μετρούμενη έξοδό του και τις αισθήσεις ή οποιαδήποτε άλλη πληροφορία την είσοδό του. Τα σήματα που παράγει ο ανθρώπινος εγκεφάλος είναι πάρα πολλά και αντιστοιχούν σε πολλές διαφορετικές συνθήκες και καταστάσεις: ύπνος, εγρήγορση, μάτια ανοιχτά, μάτια κλειστά, νοητικές λειτουργίες, μνημονικές λειτουργίες, προκλητά δυναμικά, επιληψία, Creutzfeld-Jacob, Alzheimer και αναρίθμητες άλλες. Με τη θεώρηση αυτή τουλάχιστον τίθενται ερωτήσεις σχετικά με την εγκεφαλική λειτουργία με επιστημονικό τρόπο. Εξάλλου, έχουν μελετηθεί πολλά παραδείγματα από τις φυσικές επιστήμες στα οποία οι μακροσκοπικές περιγραφές έχουν προβλεπτική αξία, παρόλο που μπορεί να αντιστοιχούν σε πολύ πολύπλοκες και μη κατανοητές μικροσκοπικές διεργασίες. Έτσι, μέσα στη σχετική μας άγνοια για την εγκεφαλική λειτουργία, είναι φυσικό να αναζητούμε αναλογίες από τις φυσικές επιστήμες. Ωστόσο, πρέπει να είμαστε γνώστες των κινδύνων της ανάλυσης κατά αναλογία.

Η παρούσα διατριβή αφορά την ανάπτυξη και χρησιμοποίηση προχωρημένων μη γραμμικών τεχνικών επεξεργασίας σήματος για τη μελέτη του HEG σήματος. Οι τεχνικές που έχουν μέχρι σήμερα χρησιμοποιηθεί είναι κυρίως γραμμικές, ωστόσο έχει φανεί ότι σε πολλές περιπτώσεις η γραμμικότητα δεν είναι αρκετή για την εξήγηση των ιδιοτήτων του HEG. Έτσι, δεδομένης και της πολυπλοκότητας που παρουσιάζει το HEG, επιβάλλεται η εφαρμογή μη γραμμικών τεχνικών και η αναζήτηση της καταλληλότητας των μη γραμμικών μοντέλων για την περιγραφή του. Οι μη γραμμικές μέθοδοι που χρησιμοποιήσαμε περιλαμβάνουν τη μη γραμμική ανάλυση, τη μη γραμμική μοντελοποίηση καθώς και την εφαρμογή του μη γραμμικού ενεργειακού τελεστή για τη χρονο-συχνотική ανάλυση της HEG δραστηριότητας. Το HEG που μελετήθηκε αφορά το HEG ρουτίνας, δηλαδή τις καταγραφές που πραγματοποιούνται με τα μάτια κλειστά σε κατάσταση ηρεμίας και τα προκλητά δυναμικά, δηλαδή τις καταγραφές που πραγματοποιούνται ως αποτέλεσμα της απόκρισης σε κάποιο ερέθισμα. Οι καταγραφές πραγματοποιήθηκαν στην Νευρολογική Κλινική του Πανεπιστημίου Αθηνών (Αιγινήτειο Νοσοκομείο).

Η διατριβή είναι οργανωμένη ως εξής: Αποτελείται από πέντε μέρη. Το πρώτο μέρος περιλαμβάνει την παρουσίαση εισαγωγικών στοιχείων που αφορούν την ηλεκτροεγκεφαλογραφία. Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζονται οι μέθοδοι της μη γραμμικής ανάλυσης χρονοσειρών που περιλαμβάν-

νουν την ανακατασκευή ελκυστών στο φασικό χώρο και τον υπολογισμό των αναλλοιώτων μεγεθών των φράκταλ διαστάσεων και των εκθετών Lyapunov. Ακολουθεί η εφαρμογή των μεθόδων σε ΗΕΓ δεξιόχειρων και αριστερόχειρων φυσιολογικών με σκοπό το διαχωρισμό τους. Στο τρίτο μέρος, αφού επιβεβαιώσουμε την ανεπάρκεια των γραμμικών μοντέλων να περιγράψουν σε όλες τις περιπτώσεις το ΗΕΓ σήμα, αναπτύσσουμε έναν αλγόριθμο για τη σύνθεση μη γραμμικών καταχωρητών ολίσθησης με ανάδραση, μοντέλο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή του ΗΕΓ σήματος. Στο τέταρτο μέρος μελετούμε την εξέλιξη στο χρόνο της δραστηριότητας των υψηλών ρυθμών του εγκεφαλογραφήματος κατά την καταγραφή προκλητών δυναμικών, χρησιμοποιώντας το μη γραμμικό ενεργειακό τελεστή. Η εξαγόμενη πληροφορία είναι ιδιαίτερης σπουδαιότητας για την κατανόηση του τρόπου συγχρονισμού των διαφόρων νευρώνων του εγκεφάλου με σκοπό την εκτέλεση κινήσεων. Τέλος, στο πέμπτο μέρος παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της διατριβής.

Κεφάλαιο 2

Το Ηλεκτροεγκεφαλογραφικό Σήμα

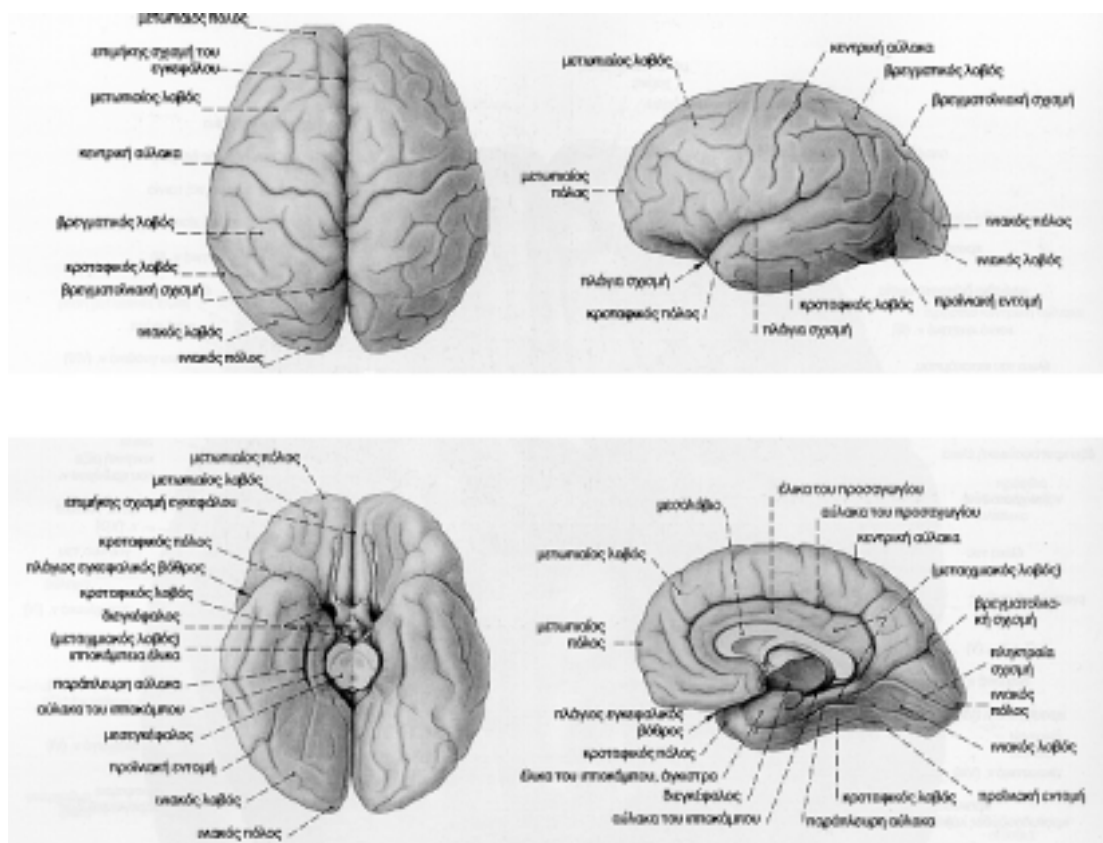
2.1 Γενικά

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαπέντε ετών έχει επιτευχθεί μεγάλη πρόοδος στην κατανόηση και μέτρηση της λειτουργίας του ανθρώπινου εγκεφάλου. Οι πολύ μεγάλες τεχνολογικές εξελίξεις έχουν οδηγήσει σε σημαντική πρόοδο στη βασική έρευνα καθώς και σε συνεχείς βελτιώσεις των καθημερινών κλινικών εφαρμογών. Η υπολογιστική τομογραφία (CT) και η μαγνητική τομογραφία (MRI) έχουν παράγει πολύτιμες κλινικά εικόνες της τρισδιάστατης δομής του εγκεφάλου, ενώ η τομογραφία εκπομπής ποζιτρονίων (PET) έχει επιτρέψει την οπτικοποίηση του τοπικού εγκεφαλογραφικού μεταβολισμού. Προς στιγμή είχε δημιουργηθεί η εντύπωση ότι αυτές οι μέθοδοι μπορούν να μειώσουν ή/και εξολοκλήρου να εκμηδενίσουν τη σημασία των υποσχόμενων εξελίξεων στην καταγραφή και επεξεργασία της ηλεκτρικής και μαγνητικής εγκεφαλικής δραστηριότητας. Ωστόσο, επειδή οι τομογραφικές μέθοδοι υστερούν στη χρονική ανάλυση που απαιτείται για τη μέτρηση δυναμικών διεργασιών, εξακολουθεί να υπάρχει η ανάγκη της εφαρμογής προχωρημένων τεχνολογιών για τη βελτίωση της καταγραφής και ανάλυσης των ηλεκτρικών και μαγνητικών εγκεφαλικών σημάτων.

Κινητήριος δύναμη για όλη την επιτευχθείσα μέχρι σήμερα πρόοδο αποτελούν από τη μία η αλματώδης ανάπτυξη της επιστήμης των υπολογιστών κατά τα τελευταία χρόνια και από την άλλη η ανάπτυξη νέων, περισσότερο ευαίσθητων, ευφυών και ρωμαλέων αλγορίθμων επεξεργασίας του ηλεκτροεγκεφαλογραφικού (HEΓ) σήματος και των προκλητών δυναμικών (ERP). Οι δυνατότητες υλικού και λογισμικού έχουν αυξηθεί τόσο πολύ και οι τιμές κόστους τους έχουν μειωθεί τόσο πολύ, ώστε σήμερα διατίθενται εμπορικά συστήματα ανάλυσης και παρουσίασης HEΓ και ERP, η υπολογιστική ισχύς των οποίων επιτρέπει την αποδοτική επεξεργασία των σημάτων και την παρουσίαση των αποτελεσμάτων σε ελάχιστα δευτερόλεπτα, αντί για ώρες ή ακόμη και μέρες που απαιτείτο στο παρελθόν.

Αναλύσεις [42] που πραγματοποιούνται σήμερα μόνο πειραματικά, όπως η ανάδειξη του ERP δυναμικού από μία μόνο εποχή, είναι βέβαιο ότι στο μέλλον θα διατίθενται σε εμπορικές εφαρμογές της καθημερινής κλινικής πράξης. Νέες, περισσότερο ισχυρές αναλύσεις οι οποίες θα αναδεικνύουν ακόμη πιο ειδικά και λεπτή υφή σήματα των διεργασιών που συμβαίνουν σε επίπεδο νευρώνων θα είναι διαθέσιμες στους ερευνητές. Επιπρόσθετα, η ταχύτατη ανάπτυξη αλγορίθμων επεξεργασίας σήματος σε διαφορετικά επιστημονικά πεδία, όπως οι γεωφυσικές έρευνες και η επεξεργασία φωνής θα συντελούν στην ανάπτυξη αλγορίθμων που εφαρμόζονται άμεσα σε εγκεφαλογραφικά σήματα.

Είναι απολύτως βέβαιη η πρόβλεψη ότι οι εξελίξεις στις τεχνικές καταγραφής, στην αύξηση της υπολογιστικής ισχύος και στην ανάπτυξη αλγορίθμων επεξεργασίας σήματος θα οδηγήσουν σε ουσιαστική βελτίωση της κλινικής εγκεφαλογραφίας.



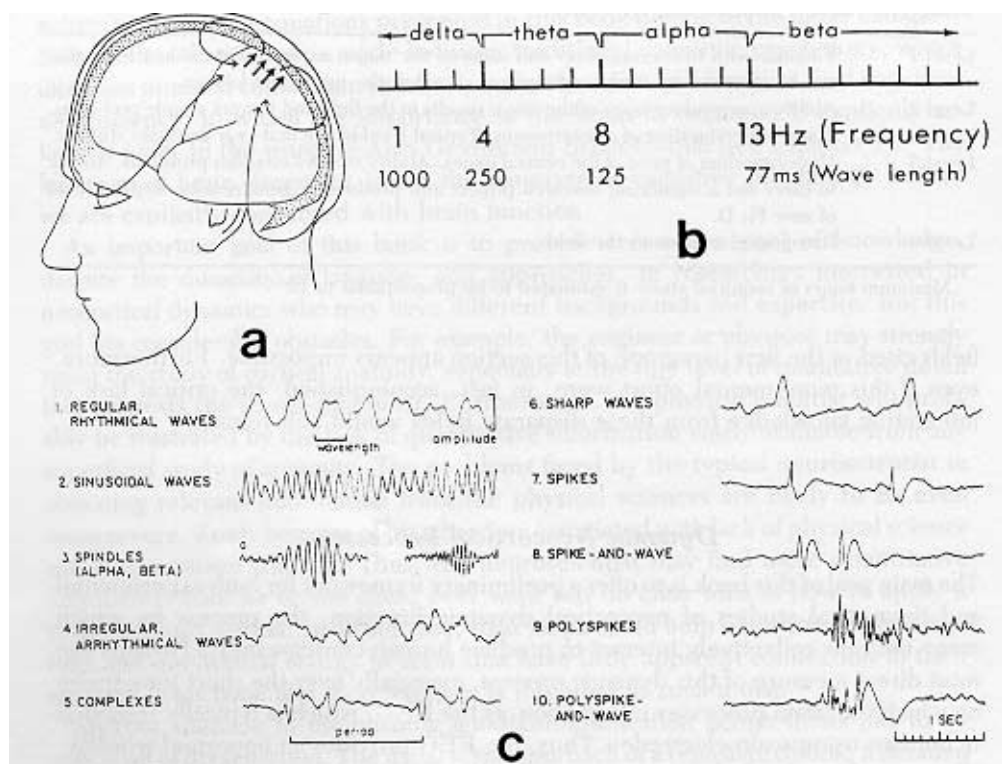
Σχήμα 2.1: Οι λοβοί των ημισφαιρίων του εγκεφάλου α) από πάνω β) από πλάγια γ) από κάτω δ) από μέσα

2.2 Ο εγκέφαλος

Ο εγκέφαλος αποτελεί το μεγαλύτερο και πλέον διαφοροποιημένο τμήμα του κεντρικού νευρικού συστήματος. Αποτελείται από τα δύο εγκεφαλικά ημισφαίρια (δεξιό και αριστερό), από τους συνδέσμους των ημισφαιρίων, από τους πυρήνες των ημισφαιρίων και από τις δύο πλάγιες κοιλίες (δεξιά και αριστερή). Η εξωτερική διαμόρφωση των ημισφαιρίων δεν είναι λεία, αλλά εμφανίζει πολλαπλούς αύλακες, μεταξύ των οποίων σχηματίζονται επάρματα κατά ποικίλες διευθύνσεις τα οποία καλούνται έλικες ή γύροι. Οι βαθύτερες από τις αύλακες καλούνται πρωτογενείς αύλακες ή σχισμές και διαιρούν την εξωτερική επιφάνεια των ημισφαιρίων σε λοβούς. Οι λοβοί των ημισφαιρίων είναι ο μετωπιαίος λοβός, ο βρεγματικός λοβός, ο κροταφικός λοβός, ο ινιακός λοβός και ο κεντρικός λοβός, οι οποίοι απεικονίζονται στο Σχήμα 2.1.

Ο μετωπιαίος λοβός είναι ο μεγαλύτερος όλων των λοβών και καταλαμβάνει περιοχές της έξω, της έσω και της κάτω επιφάνειας των ημισφαιρίων. Ο βρεγματικός λοβός βρίσκεται πίσω από το μετωπιαίο λοβό και καταλαμβάνει τμήματα της έσω και της έξω επιφάνειας των ημισφαιρίων. Ο ινιακός λοβός καταλαμβάνει μικρό τμήμα κάθε ημισφαιρίου. Ο κροταφικός λοβός χωρίζεται κατά την έξω επιφάνεια του ημισφαιρίου από το μετωπιαίο και το βρεγματικό λοβό και πίσω του βρίσκεται ο ινιακός λοβός. Εμφανίζει τρεις επιφάνειες, την έξω, την άνω και την κάτω επιφάνεια. Τέλος, ο κεντρικός εγκέφαλος αποτελεί μάζα φαιάς ουσίας.

Οι λοβοί περιλαμβάνουν περιοχές καθενιά από τις οποίες επιτελεί συγκεκριμένες λειτουργίες. Για παράδειγμα, στο μετωπιαίο λοβό ανήκουν μεταξύ άλλων οι έλικες οι οποίες στο επικρατούν ημισφαίριο (συνήθως το αριστερό για τους δεξιόχειρες) αποτελούν την κινητική περιοχή του λόγου, οι έλικες οι οποίες αποτελούν το κέντρο των μυών των κάτω άκρων, οι έλικες οι οποίες αποτελούν



Σχήμα 2.2: α) Πηγές ρεύματος που σχηματίζουν ένα στρώμα διπόλων έχουν ως αποτέλεσμα τη δημιουργία κατανομής ρευμάτων που καθορίζεται από το στρώμα διπόλων και τις ιδιότητες αγωγής του κεφαλιού. β) Οι διάφορες συχνοτικές ζώνες του ΗΕΓ που παρουσιάζουν ενδιαφέρον τόσο κλινικό όσο και ερευνητικό. γ) Μερικές χαρακτηριστικές κυματομορφές και η αντίστοιχη ιατρική ορολογία.

την προκίνητη χώρα, οι έλικες οι οποίες συνιστούν την οσφρητική περιοχή κ.α. Ο βρεγματικός λοβός περιλαμβάνει τις έλικες οι οποίες αποτελούν το ιδίως αισθητικό κέντρο (όπου προβάλλονται και ερμηνεύονται τα αισθητικά ερεθίσματα που προέρχονται από όλες τις περιοχές του αντιθέτου ημιμορίου του ανθρώπινου σώματος), τις έλικες οι οποίες αποτελούν το συνειρμικό αισθητικό κέντρο (όπου αναγνωρίζονται και ερμηνεύονται τα παρόντα αισθητικά ερεθίσματα σε σχέση με τα προηγούμενα), τις έλικες οι οποίες αποτελούν το ακουστικό κέντρο του λόγου (όπου καθίσταται αντιληπτή η έννοια των ακουομένων λέξεων), τις έλικες οι οποίες αποτελούν το οπτικό κέντρο του λόγου (όπου καθίστανται αντιληπτά τα ορώμενα σημεία της γραφής) κ.α. Επίσης ο ινιακός λοβός περιλαμβάνει μεταξύ άλλων τις περιοχές που αποτελούν το κέντρο της ενσυνειδήτου οράσεως, ενώ ο κροταφικός λοβός μεταξύ άλλων περιλαμβάνει το κέντρο της ακοής, κ.λπ.

2.3 Ηλεκτροεγκεφαλογραφική δραστηριότητα

Το πιο άμεσο ίσως μέτρο της δυναμικής της εγκεφαλικής λειτουργίας, ειδικά για τις βραχείες χρονικές κλίμακες κατά τις οποίες ο εγκέφαλος επεξεργάζεται πληροφορίες, είναι το ΗΕΓ, το οποίο καταγράφεται στους ανθρώπους χρησιμοποιώντας ηλεκτρόδια που τοποθετούνται στην επιφάνεια του κρανίου. Έτσι, το ΗΕΓ παρέχει ένα σημαντικό, αν και συχνά όχι καθαρό, παράθυρο στις λειτουργίες συγκεκριμένων τμημάτων του εγκεφάλου και ειδικά του τμήματος του φλοιού που βρίσκεται εγγύτερα στα ηλεκτρόδια καταγραφής, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2 [90]. Η πληροφορία που παρέχεται από το ΗΕΓ μπορεί να συμπληρωθεί από δεδομένα που λαμβάνονται από

ενδοκρανιακά ηλεκτροδία που συνήθως εμφυτεύονται σε ασθενείς για ιατρικούς λόγους.

Σε πρώτη προσέγγιση μπορούμε να θεωρήσουμε τον εγκέφαλο απλά ως ένα σύστημα με συγκεκριμένες εισόδους (αισθητικές πληροφορίες) και εξόδους (δραστηριότητα κίνησης). Το σύστημα αποτελείται από ένα σύνολο νευρώνων που επεξεργάζονται τις πληροφορίες εισόδου για να παράγουν την απόκριση της εξόδου. Οι νευρώνες αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και οι πληροφορίες μεταδίδονται όχι μόνο κατά μία κατεύθυνση αλλά κατά εξαιρετικά πολύπλοκο τρόπο που συνίσταται σε ένα μεγάλο πλήθος αναδράσεων και συνδέσεων. Η ίδια αισθητική πληροφορία μπορεί να ακολουθεί πολλές διαφορετικές διαδρομές μεταξύ εισόδου και εξόδου. Έτσι, το πλήθος των συνάψεων μεταξύ υποδοχέων και μυών μπορεί να είναι πολύ μεγάλο ή πολύ μικρό π.χ. δύο ή τρεις. Οι φυσιολόγοι γνωρίζουν λίγα σχετικά με τις λειτουργίες που λαμβάνουν χώρα πολύ κοντά στην είσοδο και στην έξοδο, αλλά σχεδόν τίποτε για ό,τι συμβαίνει ενδιάμεσα.

Οι χρονικές καθυστερήσεις μεταξύ της εισόδου και της εξόδου μπορούν να ποικίλουν από μερικά msec μέχρι εκατοντάδες msec ή και περισσότερο. Πολύ μικρές καθυστερήσεις σχετίζονται με αντανάκλαστικές κινήσεις και μπορεί να μη συμπεριλαμβάνουν εγκεφαλική επεξεργασία. Αντίθετα, οι μεγάλοι χρόνοι συμπεριλαμβάνουν γνωσιακή επεξεργασία.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ο εγκέφαλος θεωρείται ως μαύρο κουτί με συγκεκριμένες εισόδους που έχουν ως αποτέλεσμα τις παρατηρούμενες εξόδους. Ωστόσο, αυτή η θεώρηση μπορεί να έχει νόημα μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Για παράδειγμα, έξοδοι συχνά παρατηρούνται χωρίς κάποια ορατή είσοδο και επίσης πολλά ερεθίσματα δεν προκαλούν κάποια ορατή κινητική απάντηση. Ωστόσο, πολλοί πιστεύουν ότι τέτοιες παρατηρούμενες διαφορές είναι ποσοτικές παρά ποιοτικές και οφείλονται στις μεγάλες διαφορές στην πολυπλοκότητα μεταξύ του εγκεφάλου και των γνωστών φυσικών συστημάτων.

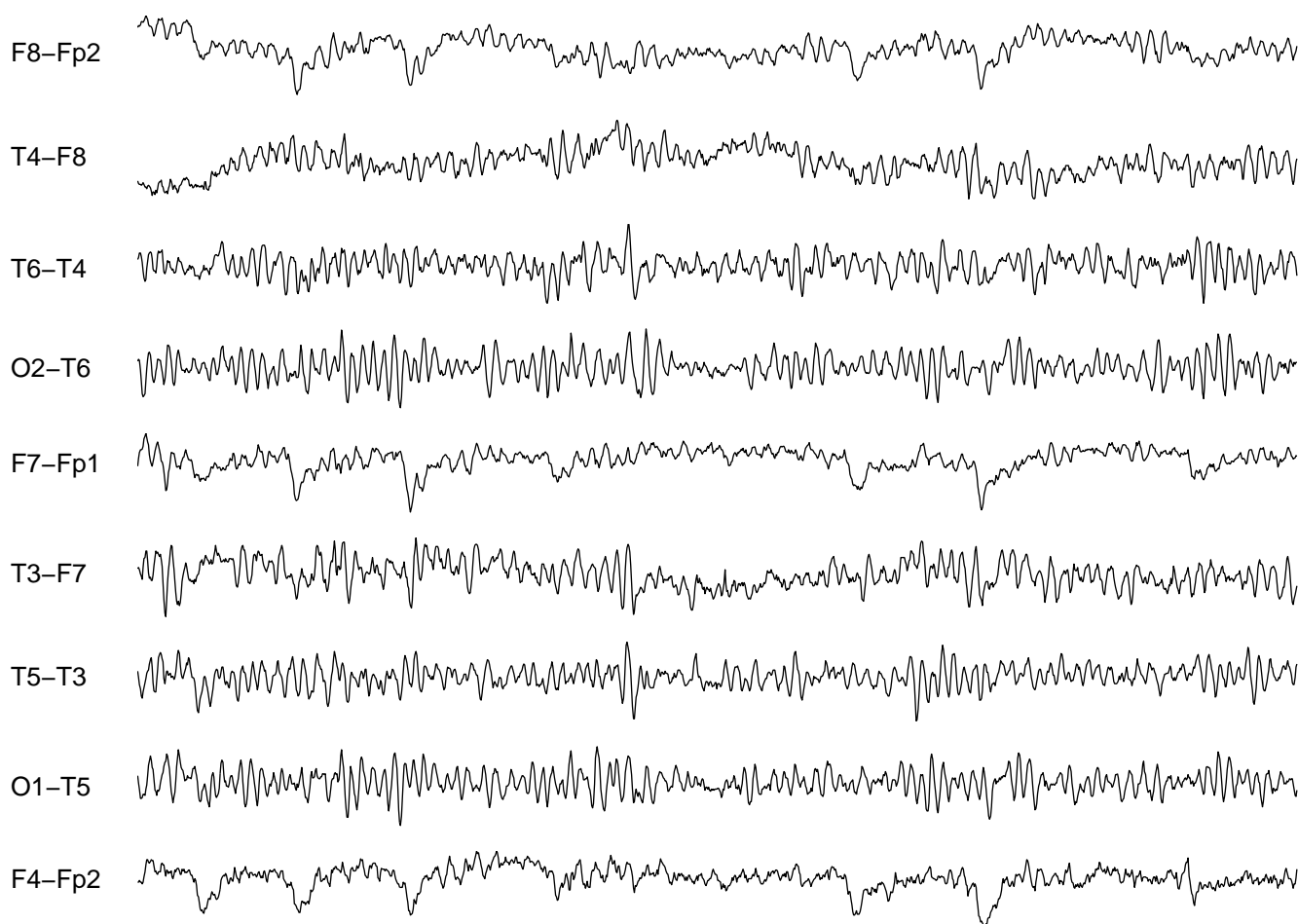
Οι φλοιϊκοί νευρώνες με βάση τη φυσιολογία και τη μορφολογία τους μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις ομάδες:

1. Νευρώνες ταχείας εκφόρτισης : παρουσιάζουν γρήγορα δυναμικά δράσης ($0.5ms$) και μορφολογικά αντιστοιχούν σε μη πυραμιδικούς νευρώνες.
2. Νευρώνες κανονικής εκφόρτισης : παρουσιάζουν δυναμικά διάρκειας $1.5ms$ και μορφολογικά αντιστοιχούν σε πυραμιδικές κυψέλες μετρίου και μικρού μεγέθους.
3. Νευρώνες ριπών : απαντούν δημιουργώντας ριπές δυναμικών και μορφολογικά αντιστοιχούν σε πυραμιδικές κυψέλες μεγάλου μεγέθους.

Σχετικά με τη δραστηριότητα των χαμηλών εγκεφαλικών ρυθμών, θεωρείται ότι καθορίζονται κύρια από νευρωνικούς βηματοδότες. Έχει βρεθεί ότι μερικοί τύποι θαλαμικών νευρώνων εμφανίζουν μη αυτόνομη ταλαντωτική συμπεριφορά ακόμη και μετά τη φραγή της συναπτικής μετάδοσης. Οι νευρώνες αυτοί παράγουν εσωτερικές ταλαντώσεις κύρια στην περιοχή των $6 - 10Hz$ και η μεταγωγή από τον έναν τρόπο ταλάντωσης στον άλλο είναι εξαρτώμενη από τάση. Έτσι, οι θαλαμικοί νευρώνες διαφέρουν ουσιαστικά από τις καρδιακές κυψέλες, οι οποίες μπορούν να διατηρούν την ταλαντωτική συμπεριφορά, ακόμα και όταν υπάρχει απουσία συγκεκριμένης εισόδου. Αντίθετα, η δραστηριότητα των υψηλότερων ρυθμών που εμφανίζεται στην κατάσταση εγρήγορσης και φαίνεται να παίζει ρόλο στην αντίληψη και στη συνείδηση δεν παρουσιάζεται ομοιόμορφα ούτε σε όλο το φλοιό ούτε στο θάλαμο.

2.4 Καταγραφή ΗΕΓ σημάτων

Ο πιο συνηθισμένος, τόσο στην κλινική πράξη όσο και στην έρευνα, τρόπος τοποθέτησης των ηλεκτροδίων καταγραφής του ηλεκτροεγκεφαλογραφικού σήματος είναι το σύστημα 10 – 20 [56].

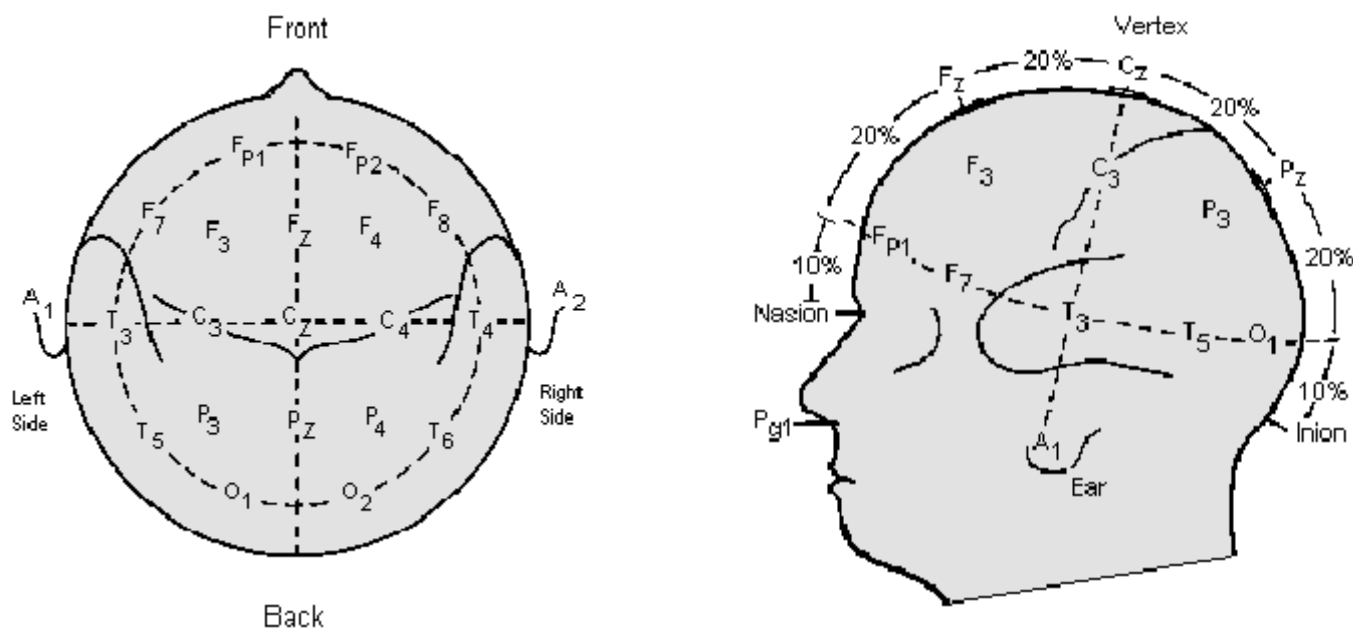


Σχήμα 2.3: Καταγραφή ΗΕΓ σήματος σύμφωνα με το 10 – 20 σύστημα

Το σύστημα αυτό χρησιμοποιεί 21 ηλεκτρόδια κατά τέτοιο τρόπο ώστε να καλύπτουν τους διαφορετικούς λοβούς του εγκεφάλου (μετωπιαίο (F), βρεγματικό (P), ινιακό (O), κροταφικό (T) και κεντρικό (C)). Το Σχήμα 2.3 παρουσιάζει μια εποχή καταγραφόμενου σήματος με το σύστημα 10 – 20, ενώ το Σχήμα 2.4 παρουσιάζει τις θέσεις των χρησιμοποιούμενων ηλεκτροδίων. Το 10 – 20 σύστημα χαρακτηρίζεται από απόσταση μεταξύ ηλεκτροδίων της τάξης των 6cm σε ένα τυπικό κεφάλι ενηλίκου. Αύξηση του πλήθους των ηλεκτροδίων καταγραφής μπορεί να επιτευχθεί με τοποθετήσεις ηλεκτροδίων μεταξύ των ηλεκτροδίων του συστήματος 10 – 20 π.χ. ηλεκτρόδια FC μεταξύ των ηλεκτροδίων F και C . Έτσι προκύπτει το τροποποιημένο 10 – 20 σύστημα.

Αν και το πλήθος των ηλεκτροδίων που απαιτούνται εξαρτάται από το εκτελούμενο πείραμα, είναι επιθυμητή η διατύπωση ενός γενικού πλαισίου με βάση το οποίο θα επιλέγεται ο αριθμός αυτός. Είναι γνωστό ότι για ένα μόνο δίπολο απαιτούνται έξι δείγματα στο χώρο για την αναπαράσταση της συνάρτησης δυναμικού στο κεφάλι [13]. Ωστόσο, καθώς ο αριθμός των διπόλων αυξάνει, ο αριθμός των απαιτούμενων χωρικών δειγμάτων μετά από ένα συγκεκριμένο όριο δεν αυξάνει, αφού οι παρατηρήσεις αλλοιώνονται λόγω της παρουσίας θορύβου. Ένα αναλυτικό εργαλείο που βοηθά στην επιλογή του αριθμού των απαιτούμενων για την καταγραφή ηλεκτροδίων παρουσιάζεται στην [134] και στηρίζεται στην υπόθεση ότι το κεφάλι μπορεί να περιγραφεί ως ημισφαιρική επιφάνεια. Το μοντέλο αυτό παρέχει αναλυτική έκφραση ως προς τις σφαιρικές αρμονικές της συνάρτησης δυναμικού στην επιφάνεια της σφαίρας.

Αν και οι αποστάσεις μεταξύ των ηλεκτροδίων για την ανίχνευση παθολογικών ιχνών ή τη



Σχήμα 2.4: Το 10 – 20 σύστημα

διαφοροποίηση της τοπογραφίας των συνιστωσών των προκλητών δυναμικών δεν πρέπει να είναι απαραίτητα μικρές, δεν είναι αρκετές για την λεπτομερέστερη ανάλυση των τοπογραφικών διαφορών που είναι σημαντικές στη μελέτη των παθολογικών διαδικασιών, όπως η έναρξη κρίσεων και η ανώμαλη νοητική λειτουργία του εγκεφάλου. Αυξάνοντας τον αριθμό των ηλεκτροδίων σε περισσότερα από 100, τότε η μεταξύ τους απόσταση μειώνεται σε περίπου 2.5cm κατά μέσο όρο. Η απόσταση βρίσκεται εντός των ορίων του μεγέθους της αναπαράστασης του κρανίου με μια μικρή διακριτή φλοιϊκή πηγή [41].

Η χρησιμότητα μιας τέτοιας αυξημένης χωρικής δειγματοληψίας παραμένει περιορισμένη από την παραμόρφωση των ΗΕΓ σημάτων καθώς διαπερνούν το υψηλής αντίστασης κρανίο. Οι παραμορφώσεις αυτές αντιστοιχούν σε ένα χωρικό χαμηλοπερατό φίλτράρισμα το οποίο προκαλεί μια αλλοίωση της κατανομής του δυναμικού στο κεφάλι. Τα τελευταία χρόνια έχει αναπτυχθεί ένα πλήθος μεθόδων για τη μείωση αυτών των παραμορφώσεων [40].

2.4.1 Χωρική ανάλυση

Η χωρική ανάλυση είναι απαραίτητη επειδή το ηλεκτρικό δυναμικό σε ένα δεδομένο σημείο του τριχωτού της κεφαλής είναι μια 'σχετική' τιμή. Το δυναμικό σε ένα σημείο ορίζεται μόνο ως προς το δυναμικό ενός άλλου σημείου. Συνεπώς, οι μετρήσεις της καθυστέρησης και των μεταβολών στη φάση του δυναμικού σε ένα σημείο του τριχωτού της κεφαλής είναι εξίσου σχετικές. Η χωρική ανάλυση οδηγεί σε μοναδικά συμπεράσματα σχετικά με τις κατανομές των δυναμικών στο χώρο και τις διαφορές τους μεταξύ διαφορετικών συνθηκών, εξεταζομένων (που καλούνται και μάρτυρες) ή χρονικών στιγμών.

Βέβαια, ο έλεγχος υποθέσεων των δεδομένων από ΗΕΓ καταγραφές καθώς και των δεδομένων των προκλητών δυναμικών μπορεί να βασιστεί στις συνήθεις μετρήσεις των διαφορών δυναμικού μεταξύ προεπιλεγμένων ηλεκτροδίων. Συνήθεις προεπιλογές ηλεκτροδίων είναι το διαμήκες μοντάζ και το οριζόντιο μοντάζ, που παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα:

Πίνακας 2.1: Διαμήκες και οριζόντιο μοντάζ ηλεκτροδίων

Διαμήκες μοντάζ	Οριζόντιο Μοντάζ
$F_8 - F_{p2}$	$F_{p2} - R$
$T_4 - F_8$	$F_8 - R$
$T_6 - T_4$	$T_4 - R$
$O_2 - T_6$	$T_6 - R$
$F_7 - F_{p1}$	$F_4 - R$
$T_3 - F_7$	$C_4 - R$
$T_5 - T_3$	$P_4 - R$
$O_1 - T_5$	$O_2 - R$
$F_4 - F_{p2}$	$F_z - R$
$C_4 - F_4$	$C_z - R$
$P_4 - C_4$	$P_z - R$
$O_2 - P_4$	$F_{p1} - R$
$F_3 - F_{p1}$	$F_3 - R$
$C_3 - F_3$	$C_3 - R$
$P_3 - C_3$	$P_3 - R$
$O_1 - P_3$	$O_1 - R$
$F_{p2} - F_{p1}$	$F_7 - R$
$F_z - F_{p1}$	$T_3 - R$
$F_z - F_{p2}$	$T_5 - R$
$C_z - F_z$	
$P_z - C_z$	

όπου το R αντιπροσωπεύει το ηλεκτρόδιο αναφοράς.

Οποιοδήποτε προεπιλεγμένο υποσύνολο όλων των θεωρητικά δυνατών κυματομορφών μπορεί να χρησιμοποιηθεί εύλογα και επιτυχώς για διάγνωση ή ταξινομήσεις, όπως ο αξιόπιστος διαχωρισμός μεταξύ μαρτύρων, χρονικών αιχμών ή συνθηκών. Ωστόσο, κατά μοναδικό τρόπο η φυσιολογική ερμηνεία των δεδομένων δεν είναι δυνατή με αυτά τα σύνολα δεδομένων, αφού δε χαρακτηρίζουν μονοσήμαντα την πραγματική διαμόρφωση του πεδίου στο χώρο. Η πραγματοποίηση μελέτης για την εντοπισμό μιας μη ενεργούς αναφοράς φαίνεται μάταιη, αφού η απόδειξη από τη φυσιολογία μη ενεργούς αναφοράς δεν είναι εφικτή. Διάφορες μη ενεργές αναφορές οι οποίες συχνά χρησιμοποιούνται δεν παράγουν ταυτόσημα αποτελέσματα. Στις απεικονίσεις πεδίου της αυθόρμητης ΗΕΓ δραστηριότητας, τα αυτιά είναι θέσεις που έχουν την τάση να δίνουν τις πιο θετικές ή αρνητικές τιμές δυναμικού ως προς τις υπόλοιπες περιοχές του τριχωτού της κεφαλής. Αυτή είναι ίσως και η αιτιολογία του γιατί τα αυτιά θεωρούνται επιτυχημένα ως σημεία αναφοράς, αφού τείνουν να παράγουν μέγιστα ΗΕΓ και προκλητά δυναμικά.

2.5 Δυσκολίες στην ποσοτικοποίηση των εγκεφαλογραφικών καταγραφών

Η φιλοδοξία της προτυποποιημένης ερμηνείας των εγκεφαλογραφικών καταγραφών έχει αποτελέσει βασικό στόχο από τις πρώτες ημέρες της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας. Υπήρχε και υπάρχει πάντοτε η επλίδα ότι με ένα περισσότερο 'εξυπνο' τρόπο ανάλυσής του, το ΗΕΓ θα αποτελέσει ένα παράθυρο στο νου [9]. Χαρακτηριστικό είναι το ακόλουθο απόσπασμα από τους Grass και Gibbs [47] στα 1938 : "Μετά την επεξεργασία 300 εγκεφαλογραφημάτων, είμαστε πεπεισμένοι ότι

το σύστημα όχι μόνο περιέχει δεδομένα με τρόπο περισσότερο χρήσιμο και ακριβή από ότι είναι δυνατό με τις παρούσες μεθόδους, αλλά σε πολλές περιπτώσεις υποδεικνύει σημαντικές αλλαγές στο ηλεκτροεγκεφαλογράφημα οι οποίες σε διαφορετική περίπτωση θα παρέμεναν χρυμμένες.' Αν και τα παραπάνω γράφτηκαν περίπου 70 χρόνια πριν, αυτή η περίληψη μιας από τις πρώτες αναλύσεις Fourier θα μπορούσε άνετα να εμφανιστεί κατά λέξη σε πολλές σημερινές μελέτες. Παρόλο που οι νέες αναλυτικές μέθοδοι φαίνονται πολλά υποσχόμενες όταν αρχικώς εφαρμόζονται, ο αρχικός ενθουσιασμός συχνά φθίνει όταν η μέθοδος αποτιμάται συστηματικά.

Μετά από 70 χρόνια συνεχούς εισαγωγής πολλά υποσχόμενων τεχνολογιών δεν είναι παράλογο να διατυπώσει κανείς την άποψη ότι τα εμφανιζόμενα προβλήματα δεν πηγάζουν αποκλειστικά μόνο από τους περιορισμούς της τεχνολογίας ανάλυσης αλλά μπορούν να περιλαμβάνουν την έλλειψη βασικής επιστημονικής γνώσης σχετικά με τη φυσιολογική βάση και τον ανατομικό εντοπισμό των γεννητριών των καταγραφόμενων εγκεφαλογραφικών δυναμικών. Εξαιτίας αυτής της έλλειψης γνώσης η ερμηνεία των εγκεφαλογραφικών καταγραφών έχει υποκειμενικό χαρακτήρα και οι ΗΕΓ καταγραφές είναι αρκετά συχνά απλά επιβεβαιωτικές παρά αληθινά διαγνωστικά εργαλεία. Οι εγκεφαλογραφιστές χαρακτηρίζουν την ηλεκτροεγκεφαλογραφική δραστηριότητα φαινομενολογικά, λαμβάνοντας υπόψη τη συχνότητα, το πλάτος και τη μορφολογία των κυμάτων, τη χωρική τους κατανομή και το συνεχή ή μεταβατικό τρόπο εμφάνισής τους. Αφού τα χαρακτηριστικά αυτά ποικίλουν ευρέως με φυσιολογικές διακυμάνσεις σε πολυάριθμους ανατομικούς, φυσιολογικούς και βιοφυσιικούς παράγοντες, δεν υπάρχει κανένας ακριβής ορισμός για τις ιδιότητες των περισσοτέρων κυμάτων και οι ερμηνείες γίνονται κύρια με βάση και υπόλοιπα χαρακτηριστικά. Συνήθως, δεν γίνεται λεπτομερής ανάλυση των ιδιοτήτων των κυματομορφών αλλά εκτιμάται η γενική εικόνα της συνολικής καταγραφής. Η σύγκριση μεταξύ των καναλιών που στόχο έχει την ανακάλυψη ανώμαλων ημισφαιρικών ασυμμετριών και εστιακών μορφών αποτελεί κύρια διαδικασία στην ερμηνεία των καταγραφών. Αυτές οι μέθοδοι δεν είχαν ποσοτικοποιηθεί μέχρι πρόσφατα που η τεχνολογία των τεχνητών έμπειρων συστημάτων έκανε περισσότερο πρακτική την αυτοματοποιημένη ανάλυση των υποκειμενικών ιδιοτήτων των κυματομορφών. Σημαντικές προσπάθειες για την τυποποίηση συχνά χρησιμοποιούμενων όρων ήταν αρκετά χρήσιμες. Οι αυτόματες αναλύσεις, όπως για παράδειγμα η μέτρηση των χαρακτηριστικών των επιληπτογενών κυματομορφών, επέκτειναν αυτούς τους περιγραφικούς ορισμούς, σε περισσότερο ακριβείς ποσοτικούς ορισμούς.

Μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 1970, θεωρείτο ότι η κύρια ώθηση της ποσοτικής ανάλυσης θα έπρεπε να είναι η μίμηση της οπτικής αξιολόγησης από τον έμπειρο εγκεφαλογραφιστή των γραφικών στοιχείων του καταγραφόμενου σήματος με σκοπό την ελαχιστοποίηση της υποκειμενικής ανθρώπινης κρίσης και την αύξηση της αποδοτικότητας. Ωστόσο, με την εμπειρία, έγινε σαφές ότι αυτό είναι ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα επειδή τα κριτήρια του έμπειρου εγκεφαλογραφιστή δεν είναι ακριβώς καθορισμένα και επίσης οι γνώμες των ειδικών μπορούν να ποικίλουν σημαντικά. Επιπλέον, το γεγονός ότι ακόμα και το καλύτερο έμπειρο σύστημα στερείται την ευρεία γνώση ενός έμπειρου εγκεφαλογραφιστή, η χρησιμότητα του υποθετικού αυτόματου εγκεφαλογραφιστή θα ήταν αρκετά περιορισμένη. Παρόλα αυτά η πρόοδος στην προσπάθεια ποσοτικοποίησης των εγκεφαλογραφικών καταγραφών είναι συνεχής και επιτυγχόμενη και η επιτυχία της βασίζεται στην αλληλεπίδραση μεταξύ των ηλεκτροεγκεφαλογραφιστών και των σχεδιαστών των συστημάτων επεξεργασίας του ΗΕΓ σήματος.

Μέρος II

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

Κεφάλαιο 3

Δυναμικά Συστήματα

Η ανακάλυψη του ντετερμινιστικού χάους και των παράξενων ελκυστών οδήγησε τους ερευνητές στην ανάπτυξη μεθόδων μη γραμμικής ανάλυσης χρονοσειρών με βάση τη θεωρία των δυναμικών συστημάτων και στόχο την ανίχνευση της πιθανής παρουσίας χάους χαμηλής διάστασης στις μετρούμενες χρονοσειρές.

3.1 Εισαγωγικές έννοιες

Ενα δυναμικό σύστημα είναι ένα μαθηματικό μοντέλο ή ένας νόμος της μορφής:

$$X(t + \delta t) = \Phi_{\delta t}(X(t), \mu_k, t) \quad (3.1)$$

όπου το $X(t)$ είναι ένα διάνυσμα μεταβλητών που περιγράφει πλήρως την κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή t :

$$X(t) = (X_1(t) \quad X_2(t) \quad \cdots \quad X_m(t)), X(t) \in \mathcal{R}^m$$

και $X(t + \delta t)$ είναι η κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή $t + \delta t$ και $\mu_k, k = 1, \dots, M$ οι ανεξάρτητες του χρόνου παράμετροι του συστήματος. Η επιλογή των καταστατικών μεταβλητών επιβάλλεται από τη φύση του συστήματος. Για παράδειγμα, στη θερμοδυναμική των ιδανικών αερίων, ως δυναμικές μεταβλητές επιλέγονται η θερμοκρασία, η πίεση και ο όγκος. Στη συνέχεια θα αναφερόμαστε σε συνεχή δυναμικά συστήματα στα οποία οι ανεξάρτητες μεταβλητές του συστήματος X_i είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες συναρτήσεις του χρόνου, συνεπώς μπορεί να οριστεί η πυκνότητα των καταστάσεων στη γειτονιά καθεμιάς από τις δυνατές καταστάσεις.

Η κατάσταση του συστήματος οποιαδήποτε χρονική στιγμή αναπαριστάται από ένα σημείο στο χώρο καταστάσεων ή αλλιώς φασικό χώρο. Ο φασικός χώρος είναι ένας m -διάστατος χώρος που ορίζεται από τις m δυναμικές μεταβλητές. Οι βαθμοί ελευθερίας ενός συστήματος καθορίζεται από τη διάσταση του φασικού χώρου m . Η εξέλιξη του συστήματος παράγει μια ακολουθία χρονικά διαδοχικών καταστάσεων του συστήματος που αποτελούν τη φασική τροχιά.

Ενα σύστημα είναι γραμμικό εάν οι έξοδοι είναι ανάλογες των εισόδων του. Αυτή η αναλογία οδηγεί σε ένα σχετικά απλό εύρος δυναμικής συμπεριφοράς. Αντίθετα, ένα μη γραμμικό σύστημα δεν υπακούει εν γένει στο νόμο αυτό της αναλογίας. Δηλαδή, ο νόμος εξέλιξης ενός μη γραμμικού συστήματος δεν μπορεί να εκφραστεί ως προς ένα γραμμικό μετασχηματισμό μιας προηγούμενης κατάστασης: $X(t + \delta t) = f(X(t)) \neq A \cdot X(t)$ για κάποιο πίνακα ή γραμμικό τελεστή A . Επίσης, για τα μη γραμμικά συστήματα, εν γένει δεν ισχύει η αρχή της υπέρθεσης. Δηλαδή, εάν οι $X(t)$ και $Y(t)$ είναι δύο λύσεις ενός μη γραμμικού συστήματος, η $\alpha X(t) + \beta Y(t)$ δεν είναι απαραίτητα επίσης λύση.

Τα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα μπορεί να εμφανίζουν πολλούς τύπους χρονικής εξέλιξης ανάλογα με τη δομή του συστήματος. Η συμπεριφορά τους μπορεί να είναι τόσο απλή όσο η παραμονή σε ένα σημείο ισορροπίας ή σταθερό σημείο για το οποίο $X(t+\delta t) = X(t)$. Σημειώνεται ότι και τα γραμμικά συστήματα μπορούν να εμφανίσουν αυτή τη συμπεριφορά. Άλλη μια απλή λύση σε ένα μη γραμμικό σύστημα είναι μια περιοδική τροχιά. Αυτό αντανακλά σε ταλαντώσεις του συστήματος και είναι κάτι που απαντάται και στη γραμμική δυναμική. Όμως η εξέλιξη ενός μη γραμμικού συστήματος μπορεί να είναι πολύ περισσότερο πολύπλοκη. Μάλιστα μπορεί να είναι και χαοτική.

Ένας σημαντικός διαχωρισμός μεταξύ των δυναμικών συστημάτων βασίζεται στο εάν η δυναμική είναι πλήρως ντετερμινιστική ή εάν η εξέλιξη προκύπτει, τουλάχιστον μερικώς, ως αποτέλεσμα στοχαστικών διαδικασιών.

Στα ντετερμινιστικά δυναμικά συστήματα, εάν είναι δεδομένη μια αρχική κατάσταση $X(t)$, τότε η κατάσταση κάποια επόμενη χρονική στιγμή, $X(t + \delta t)$, καθορίζεται κατά μοναδικό τρόπο από το νόμο της εξέλιξης. Αυτή η ιδιότητα της μοναδικότητας υπονοεί ότι στα ντετερμινιστικά συστήματα, οι τροχιές στο φασικό χώρο δεν μπορούν να τέμνονται σε πεπερασμένο χρόνο.

Στα στοχαστικά δυναμικά συστήματα, μόνο η πιθανότητα $P(X(t + \delta t))$ μπορεί να προσδιορίζεται από τη γνώση της κατάστασης $X(t)$ και οι τροχιές στο φασικό χώρο μπορούν να τέμνονται. Είναι αρκετές φορές χρήσιμο να θεωρηθούν ντετερμινιστικά δυναμικά συστήματα ως στοχαστικά απλά επειδή δε γνωρίζουμε την πλήρη περιγραφή όλων των μεταβλητών ή επειδή το σύστημα έχει πολλούς βαθμούς ελευθερίας και αποδεικνύεται περισσότερο πρόσφορη η μεταχείριση του συστήματος ως στοχαστικό.

Ένα δυναμικό σύστημα λέγεται αυτόνομο εάν οι εξισώσεις κίνησης δεν εξαρτώνται ρητώς από το χρόνο, αλλά μόνο από τις ανεξάρτητες μεταβλητές του. Κάθε δυναμικό σύστημα μπορεί να μετατραπεί σε αυτόνομο, με την εισαγωγή μιας επιπλέον ανεξάρτητης μεταβλητής γραμμικά εξαρτημένης από το χρόνο. Στην περίπτωση των αυτόνομων συστημάτων οι φασικές τροχιές δε διασταυρώνονται σε κανένα σημείο του φασικού χώρου, εκτός από τα σημεία ισορροπίας. Σε διαφορετική περίπτωση από τα σημεία διασταύρωσης δε θα οριζόταν μονοσήμαντα η εξέλιξη του συστήματος. Επομένως σε κάθε σημείο του φασικού χώρου αντιστοιχεί μία και μόνο κατάσταση του συστήματος. Αυτή η ιδιότητα των αυτόνομων συστημάτων είναι πολύ χρήσιμη εποπτικά, για αυτό το λόγο θα αναφερόμαστε στα δυναμικά συστήματα σε αυτόνομη μορφή.

Δυναμικά συστήματα παρουσιάζονται σε πολλές διαφορετικές μορφές και έτσι είναι πρόσφορη η ταξινόμησή τους σε κατηγορίες. Ο απλούστερος τύπος δυναμικών συστημάτων είναι εκείνα στα οποία ο νόμος εξέλιξης είναι μια απλή αλγεβρική έκφραση. Μια τέτοια έκφραση προκύπτει όταν θεωρούμε συστήματα στα οποία ο χρόνος είναι διακριτός. Τότε

$$X(t+1) = f(X(t), \mu_k) \quad (3.2)$$

όπου $X \in \mathcal{R}^m$ και $f(\cdot)$ μια γνωστή αλγεβρική συνάρτηση. Τα δυναμικά συστήματα αυτού του τύπου συχνά καλούνται απεικονίσεις. Σημειώνεται ότι τα διακριτού χρόνου συστήματα δεν είναι πάντοτε απεικονίσεις του \mathcal{R}^m στον εαυτό του.

Όταν η μεταβλητή χρόνου είναι συνεχής, ο νόμος της εξέλιξης του δυναμικού συστήματος λαμβάνει τη μορφή του συνόλου διαφορικών εξισώσεων. Τότε μιλάμε για συνεχούς χρόνου δυναμικά συστήματα, η απλούστερη μορφή των οποίων περιγράφεται από κανονικές διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{dX}{dt} = \dot{X} = F(X, \mu_k) \quad (3.3)$$

όπου $X \in \mathcal{R}^m$ και $F(X)$ είναι μια ρητά εκπεφρασμένη συνάρτηση με παραμέτρους μ_k . Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται ως ένα πρόβλημα αρχικών συνθηκών έχοντας κατά νου ότι το σύστημα εξελίσσεται από κάποια γνωστή αρχική κατάσταση.

Οι κανονικές διαφορικές εξισώσεις της μορφής (3.3) είναι πεπερασμένης διάστασης. Οι λύσεις τους μπορούν να θεωρηθούν ως τροχιές σε χώρο m -διαστάσεων. Περισσότερο πολύπλοκα συνεχούς χρόνου δυναμικά συστήματα είναι απειροδιάστατα. Δύο συνήθη παραδείγματα τέτοιων συστημάτων είναι οι διαφορικές εξισώσεις καθυστέρησης και οι μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Ένα δυναμικό σύστημα καλείται διατηρητικό εάν υπάρχει μια ποσότητα $E(X(t))$ (π.χ. η πυκνότητα καταστάσεων $\rho(X, t)$) που παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της εξέλιξης ($\dot{E} = 0$). Αυτό υπονοεί ότι η δυναμική του συστήματος λαμβάνει χώρα σε μια πολλαπλότητα με διάσταση $m - 1$, η οποία καθορίζεται από τη σχέση $E = \text{σταθερό}$.

Τα δυναμικά συστήματα της μορφής $\dot{X} = F(X)$ διατηρούν τον όγκο στο φασικό χώρο εάν $\nabla \cdot F = 0$, όπου οι μερικές παραγωγίσεις στο ∇F γίνονται ως προς όλες τις ανεξάρτητες μεταβλητές του συστήματος. Η ύπαρξη μιας διατηρούμενης ποσότητας και η διατήρηση του όγκου στο φασικό χώρο είναι ανεξάρτητες ιδιότητες των δυναμικών συστημάτων. Ωστόσο, πολλά δυναμικά συστήματα με φυσικό ενδιαφέρον χαρακτηρίζονται επίσης από τη διατήρηση όγκου στο φασικό χώρο.

Μη διατηρητικά ονομάζονται τα συστήματα εκείνα στα οποία ο όγκος του φασικού χώρου που καταλαμβάνεται από ένα σύνολο αρχικών συνθηκών δε διατηρείται, αλλά στην πραγματικότητα μειώνεται με την πάροδο του χρόνου, δηλαδή $\nabla \cdot F < 0$. Με άλλα λόγια, η ροή του δυναμικού συστήματος συστέλλεται. Δεδομένου ότι το σύστημα είναι φραγμένο, η συστολή αυτή υπονοεί ότι, καθώς $t \rightarrow \infty$, η κίνηση περιορίζεται σε ένα σύνολο A με μηδενικό όγκο στο φασικό χώρο και διάσταση $D < N$. Το σύνολο αυτό είναι ένας ελκυστής του συστήματος.

3.2 Ελκυστές

Αρχικά δίνουμε τους ορισμούς του αναλλοιώτου συνόλου, του συνόλου έλξης και της κοίτης έλξης. Ένα σύνολο A ονομάζεται αναλλοίωτο εάν απεικονίζεται στον εαυτό του από τη ροή $A \xrightarrow{t} A$.

Ένα αναλλοίωτο σύνολο A καλείται σύνολο έλξης (ελκυστής) εάν υπάρχει ένα σύνολο B με μηδενικό μέτρο, $A \subset B$, τέτοιο ώστε $B \xrightarrow{t} A$. Το B καλείται κοίτη έλξης του A .

Τα μη διατηρητικά συστήματα παρουσιάζουν πολλούς ποιοτικά διαφορετικούς τύπους ελκυστών, με περισσότερο συνηθισμένους τα σταθερά σημεία, τους οριακούς κύκλους, τη σχεδόν περιοδική κίνηση και τους χαοτικούς (παράξενους) ελκυστές.

Πολλαπλά σημεία ισορροπίας εμφανίζονται ακόμη και για πολύ απλά μη γραμμικά μοντέλα. Στα μονοδιάστατα μη διατηρητικά συστήματα συνεχούς χρόνου χωρίς ρητή χρονοεξαρτημένη εξωτερική διέγερση, δηλαδή σε μια αυτόνομη κανονική διαφορική εξίσωση, τα σταθερά σημεία αποτελούν τους μόνους δυνατούς ελκυστές.

Αυτόνομα μη διατηρητικά δυναμικά συστήματα συνεχούς χρόνου δύο διαστάσεων μπορεί να εμφανίσουν μόνο σταθερά σημεία ισορροπίας ή οριακούς κύκλους σε ασυμπτωτικά μεγάλους χρόνους. Η δυναμική είναι ντετερμινιστική υπονοώντας ότι οι τροχιές δεν μπορούν να τέμνονται σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, αλλά ο φασικός χώρος είναι ένα επίπεδο. Έτσι, σημεία ή κλειστές καμπύλες είναι τα μόνο μη τεμνόμενα γεωμετρικά αντικείμενα με διάσταση μικρότερα από 2. Περισσότερο πολύπλοκοι ελκυστές, όπως οι σχεδόν περιοδικές κινήσεις και η χαοτική συμπεριφορά απαιτούν τουλάχιστον τριών διαστάσεων φασικό χώρο εάν η δυναμική του συστήματος περιγράφεται από κανονικές διαφορικές εξισώσεις.

Σε πολλές περιπτώσεις οι ελκυστές είναι παράξενα αντικείμενα με μη ακέραια διάσταση (fractal). Για παράδειγμα, η τροχιά μπορεί να ακολουθεί μια διαδρομή στο φασικό χώρο που απομακρύνεται σπειροειδώς από ένα ασταθές σημείο και κινείται σε βρόχο κοντά σε ένα άλλο ασταθές σημείο. Στη συνέχεια απομακρύνεται σπειροειδώς από τη δεύτερη αυτή ασταθή περιοχή και κινείται πίσω προς τη γειτονιά του πρώτου ασταθούς σταθερού σημείου. Η μεταγωγή μεταξύ των

τροχιών γύρω από τα ασταθή σημεία ακολουθεί μια ανώμαλη περιοδική ακολουθία.

Τροχιές που ξεκινούν από γειτονικά σημεία στον παράξενο ελκυστή αποκλίνουν ταχύτατα το ένα από το άλλο, παρόλο που παραμένουν στον ελκυστή. Αυτή η ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες κάνει πρακτικά αδύνατη την πρόβλεψη της τροχιάς παρόλο που το σύστημα είναι ντετερμινιστικό.

Όπως συμβαίνει με όλους τους ελκυστές, οι τροχιές που εκκινούν από διαφορετικές αρχικές συνθήκες σύντομα καλύπτουν το σύνολο του ελκυστή. Ωστόσο, στους παράξενους ελκυστές δύο γειτονικές τροχιές δεν παραμένουν η μία κοντά στην άλλη. Η απόκλιση αυτή σημαίνει πως η εξέλιξη του συστήματος από δύο λίγο διαφορετικές αρχικές συνθήκες θα είναι εντελώς διαφορετική. Με άλλα λόγια η κατάσταση του συστήματος μετά από μικρό χρονικό διάστημα μπορεί να είναι οποιαδήποτε παρά το γεγονός ότι οι αρχικές συνθήκες ήταν πολύ κοντά η μία με την άλλη. Στην περίπτωση αυτή θα λέγαμε ότι το σύστημα δημιούργησε τυχαιότητα. Επομένως υπάρχουν συστήματα τα οποία, αν και περιγράφονται από απλούς ντετερμινιστικούς κανόνες, είναι δυνατόν να δημιουργήσουν τυχαιότητα. Η τυχαιότητα που παράγεται με αυτόν τον τρόπο ονομάζεται χάος, τα αντίστοιχα συστήματα χαοτικά δυναμικά συστήματα και οι ελκυστές τους χαοτικοί ή παράξενοι ελκυστές.

Οι συνέπειες της ιδιότητας αυτής είναι προφανείς. Εάν γνωρίζουμε ακριβώς τις αρχικές συνθήκες θα μπορούσαμε ακολουθώντας την τροχιά που αντιστοιχεί στην εξέλιξη του συστήματος και βασίζεται σε αυτές τις αρχικές συνθήκες, να προβλέψουμε την εξέλιξη του συστήματος για πάντα. Όμως, δεν μπορούμε να έχουμε πλήρη γνώση των αρχικών συνθηκών. Τα όργανα που διαθέτουμε είναι δυνατόν να μετρήσουν μόνο κατά προσέγγιση τις διάφορες τιμές (θερμοκρασία, πίεση κ.τ.λ) των αρχικών συνθηκών. Πάντοτε υπάρχει μια απόκλιση των μετρούμενων από τις πραγματικές αρχικές συνθήκες. Έτσι, ακόμη και αν γνωρίζουμε επακριβώς τους φυσικούς νόμους που περιγράφουν το σύστημα, λόγω της φύσης του υποκείμενου ελκυστή η πραγματική κατάσταση του συστήματος κάποια χρονική στιγμή αργότερα μπορεί να είναι εντελώς διαφορετική από αυτή που προβλέφθηκε. Έτσι, λόγω της φύσης του συστήματος, τα αρχικά λάθη μεγαλώνουν και η δυνατότητα πρόβλεψης περιορίζεται.

Οι παράξενοι ελκυστές είναι λοιπόν στενά συνδεδεμένοι με τη χαοτική δυναμική και την μη προβλεψιμότητα στα μη διατηρητικά συστήματα. Αυστηρά μιλώντας, ένας παράξενος ελκυστής είναι μια συλλογή απείρου πλήθους ασταθών περιοδικών τροχιών οι οποίες είναι κατά κάποια έννοια ολικά ελκυστικές. Γεωμετρικά, τα αντικείμενα αυτά είναι πολύ πολύπλοκα. Η χαοτική κίνηση μπορεί να θεωρηθεί ως η κίνηση της τροχιάς του συστήματος, η οποία καθώς περιφέρεται διαμέσου αυτού του συνόλου των ασταθών σημείων, περιπλανάται πλησίον μιας περιοχής τη μια στιγμή και στη συνέχεια μετάγεται στη γειτονιά μιας άλλης περιοχής κατά ένα φαινομενικά τυχαίο τρόπο.

Υπάρχουν δύο βασικές ιδιότητες των παράξενων ελκυστών που οδηγούν σε μεγέθη τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το χαρακτηρισμό τους. Οι ιδιότητες αυτές είναι:

- Ευαισθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Η ευαισθησία αυτή μπορεί να ποσοτικοποιηθεί από τους εκθέτες Lyapunov που μετρούν τον εκθετικό ρυθμό απόκλισης γειτονικών τροχιών στο φασικό χώρο. Προφανώς, στην περίπτωση του χάους, ο εκθέτης αυτός πρέπει να είναι θετικός.
- Δομή φράκταλ. Τα φράκταλς χαρακτηρίζονται από τη διάσταση φράκταλ, η οποία είναι μη ακέραιος αριθμός και συνήθως μικρότερη από την τοπολογική διάσταση. Το χαρακτηριστικό αυτό σχετίζεται με την αυτοομοιότητα τέτοιων γεωμετρικών δομών. Ένα σύνολο φράκταλ χαρακτηρίζεται από κάποια μορφή κλίμακας, με την έννοια ότι τμήματα των συνόλων με κατάλληλη αλλαγή κλίμακας εμφανίζουν τις ίδιες ιδιότητες με ολόκληρο το σύνολο σε κάθε κλίμακα.

Πρέπει να σημειωθεί ότι, αν και υπάρχουν μη-φράκταλ χαοτικοί ελκυστές όπως επίσης και

φράκταλ μη χαοτικοί ελκυστές, στα περισσότερα συστήματα οι χαοτικοί ελκυστές έχουν φράκταλ δομή.

3.3 Διακλαδώσεις (bifurcations)

Μια από τις βασικές ιδιότητες των δυναμικών συστημάτων είναι αυτή της διακλάδωσης. Με τον όρο αυτό εννοούμε ότι καθώς μεταβάλλουμε μία από τις εσωτερικές παραμέτρους του συστήματος, παρατηρούμε μεταβατικές καταστάσεις στη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος. Το όριο στο οποίο συμβαίνει η μετάβαση ονομάζεται σημείο διακλάδωσης. Πριν από το σημείο αυτό παρατηρούμε έναν τύπο δυναμικής συμπεριφοράς και μετά από αυτό έναν άλλο τύπο δυναμικής συμπεριφοράς.

Ένα από τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά των μη γραμμικών συστημάτων είναι ότι πολλές διακλαδώσεις είναι κοινές. Δηλαδή, πολλές μεταβατικές καταστάσεις παρουσιάζουν κοινή μορφή, ανεξάρτητα από το φυσικό σύστημα στο οποίο συμβαίνουν. Έτσι μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τις διακλαδώσεις και από την κατανόηση των πιο συνηθισμένων κατηγοριών διακλαδώσεων, μπορούμε να κατανοήσουμε πολλά είδη μεταβάσεων.

Είναι πιθανόν από πολύ απλή δυναμική να καταλήγουμε τελικά σε εξαιρετικά ασταθή συστήματα στα οποία να παρατηρούμε τυρβώδη συμπεριφορά σε πολλές κλίμακες της κίνησης και την εμφάνιση σύμφωνων δομών. Πιο συγκεκριμένα, η τυρβώδης συμπεριφορά συνήθως προκύπτει ως αποτέλεσμα μιας ακολουθίας διακλαδώσεων που οδηγεί από μια απλή κανονική ροή σε κατάσταση τυρβώδους συμπεριφοράς. Μέρος της ακολουθίας αυτής είναι η περίφημη μετάβαση στο χάος. Ωστόσο, η ακολουθία αυτή καθεαυτή αποτελεί απλά μια διαδοχή γνωστών τύπων διακλαδώσεων. Οι κύριοι τύποι διακλαδώσεων που εμφανίζονται στα χαμηλής τάξης δυναμικά συστήματα είναι:

α) Η διακλάδωση Pitchfork: Αντιστοιχεί στην κατάσταση στην οποία ένα σημείο ισορροπίας μεταβάλει την ευστάθειά του και διαχέεται σε δύο σημεία. Όταν το αρχικό σημείο ισορροπίας χάνει την ευστάθειά του και τα δύο νέα σταθερά σημεία είναι ευσταθή, τότε η διακλάδωση καλείται υπερκρίσιμη διακλάδωση Pitchfork. Όταν τα νέα σημεία ισορροπίας είναι ασταθή, συνυπάρχουν με το ευσταθές σημείο ισορροπίας και η διακλάδωση Pitchfork καλείται υποκρίσιμη.

β) Η διακλάδωση Hopf: Στην απλούστερη μορφή της, ένα σταθερό σημείο χάνει την ευστάθειά του διαχέόμενο σε έναν οριακό κύκλο. Δηλαδή, το σημείο ισορροπίας χάνει την ευστάθειά του και παράγονται διαταραχές που λαμβάνουν τη μορφή αυξανόμενων ταλαντώσεων. Σε μια υπερκρίσιμη διακλάδωση Hopf, οι αυξανόμενες ταλαντώσεις οδηγούνται σε έναν κοντινό οριακό κύκλο. Ωστόσο, σε μια υποκρίσιμη διακλάδωση Hopf, ένας ασταθής οριακός κύκλος έρχεται σε σύγκρουση με το ευσταθές σημείο μετατρέποντάς το σε ασταθές.

γ) Διακλάδωση με διπλασιασμό περιόδου: Ένας οριακός κύκλος μπορεί να παρουσιάζει διακλάδωση στην οποία η βασική περίοδος διπλασιάζεται και το σύστημα πραγματοποιεί δύο στροφές σε κοντινούς βρόχους πριν επιστρέψει στην αρχική θέση. Η διακλάδωση με διπλασιασμό περιόδου αποκαλύπτεται με την εμφάνιση υποαρμονικών στη φασματική ισχύ του συστήματος. Ένα από τα πιο γνωστά σενάρια μετάβασης στο χάος βασίζεται στην ακολουθία διακλαδώσεων με διπλασιασμό περιόδου, κατά τη διάρκεια της οποίας η βασική περίοδος T τροποποιείται έτσι ώστε $T \rightarrow 2T \rightarrow 4T \rightarrow \dots \rightarrow 2^n T$ μέχρις ότου εμφανιστεί η χαοτική συμπεριφορά που σχετίζεται με το όριο $n \rightarrow \infty$.

3.4 Τομή Poincare

Όταν η διάσταση του δυναμικού συστήματος είναι μεγαλύτερη από δύο, δεν είναι πια δυνατή η οπτικοποίηση της συμπεριφοράς των τροχιών. Επίσης, η προβολή σε ένα επίπεδο συχνά αμαυρώνει

τη δομή του ελκυστή. Αντί για την προβολή, πρέπει να αναπτυχθούν άλλα εργαλεία και ένα τέτοιο εργαλείο είναι η τομή Poincaré. Η τομή Poincaré σχηματίζεται από την τομή μιας τροχιάς με μια δεδομένη επιφάνεια ή πολλαπλότητα στο φασικό χώρο. Η πολλαπλότητα αυτή είναι η επιφάνεια τομής. Πολλές φορές είναι χρήσιμο να επιλέξει κανείς μόνο εκείνες τις τομές με την ίδια διεύθυνση ως προς την πολλαπλότητα. Είναι φανερό ότι απαιτεί κανείς η επιλεγμένη πολλαπλότητα να μην είναι πουθενά εφαπτόμενη της τροχιάς. Το σύνολο των σημείων τομής είναι η τομή Poincaré. Με δεδομένα τα σημεία αυτά μπορούμε να συσχετίσουμε ένα νόμο που απεικονίζει ένα σημείο τομής στο επόμενο. Αυτή η απεικόνιση καλείται απεικόνιση Poincaré στη συγκεκριμένη επιφάνεια τομής. Η απεικόνιση Poincaré ανάγει ένα σύστημα από συνεχούς σε διακριτού χρόνου και τη διάσταση από m σε $m - 1$. Έτσι, από την εξίσωση $\dot{X} = F(X)$, $X \in \mathcal{R}^m$ καταλήγουμε στην $\xi_{n+1} = f(\xi_n)$, $\xi_n \in \mathcal{R}^{m-1}$, όπου με ξ_n συμβολίζουμε την τομή του $X(t)$ με την επιλεγμένη πολλαπλότητα:

$$X(t) \rightarrow \xi_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad X \in \mathcal{R}^m, \xi_n \in \mathcal{R}^{m-1} \quad (3.4)$$

Τέλος, ένα άλλο είδος απεικόνισης είναι η στροβοσκοπική απεικόνιση που λαμβάνεται από την αναγωγή της τροχιάς σε μια σειρά από στιγμιότυπα που λαμβάνονται σε ίσα χρονικά διαστήματα. Στην περίπτωση αυτή, μεταβαίνει κανείς από την εξίσωση $\dot{X} = F(X)$ στην $n_{n+1} = g(n_n)$, όπου $n_n = X(t_0 + n\Delta t)$. Σημειώνεται ότι στις στροβοσκοπικές απεικονίσεις δεν μειώνεται η διάσταση του συστήματος.

3.5 Εννοιολογικές συνέπειες του ντετερμινιστικού χάους

Η ανακάλυψη ότι ακόμη και πολύ απλά μαθηματικά μοντέλα μπορούν να οδηγήσουν σε μη προβλέψιμη συμπεριφορά έχει βέβαια διάφορες εννοιολογικές συνέπειες. Οι δύο πιο σημαντικές από αυτές είναι οι ακόλουθες:

- η παρουσία της μη προβλεψιμότητας στα ντετερμινιστικά συστήματα δεν απαιτεί τυχαίες εξωτερικές επιδράσεις ή διακυμάνσεις, αλλά είναι μια εσωτερική ιδιότητα πολλών δυναμικών συστημάτων.
- μια παρατηρούμενη ανώμαλη και μη προβλέψιμη συμπεριφορά δεν υπονοεί απαραίτητα την παρουσία ούτε ενός μεγάλου πλήθους βαθμών ελευθερίας στη δυναμική των συστημάτων ούτε της τύχης, καθώς τρεις μη γραμμικές συζευγμένες μεταβλητές μπορούν να την παράγουν.

Αυτή η προσδοκία για απλότητα και μη προβλεψιμότητα έχει δώσει ώθηση σε πολλές προσπάθειες για την ανακάλυψη εάν μια παρατηρούμενη τυχαία δυναμική οφείλεται πραγματικά σε μια τυρβώδη συμπεριφορά ή στην παρουσία ενός μικρής διάστασης παράξενου ελκυστή.

Κεφάλαιο 4

Ανακατασκευή Φασικού Χώρου

Η κατάλληλη περιγραφή της δυναμικής ενός συστήματος απαιτεί την πρόσβαση στο φασικό του χώρο. Ωστόσο, οι πειραματικές μετρήσεις σπάνια παρέχουν απευθείας πληροφορία όλων των μεταβλητών του φασικού χώρου ενός συστήματος. Τυπικό αποτέλεσμα ενός πειράματος ή μιας παρατήρησης είναι η χρονοσειρά μιας βαθμωτής μεταβλητής $h(t)$, της οποίας η σχέση με τις μεταβλητές του φασικού χώρου δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή. Στην περίπτωση αυτή, το πρώτο βήμα είναι η προσπάθεια ανακατασκευής μιας προσέγγισης του φασικού χώρου του συστήματος. Ως απάντηση στο πρόβλημα αυτό έχει προταθεί από τους Takens και Packard et al. [121], [92] μια ενδιαφέρουσα μεθοδολογία που είναι γνωστή ως εμβάπτιση χρόνου. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε αναλυτικά την μεθοδολογία αυτή που χρησιμοποιείται για την ανακατασκευή της πληροφορίας των δυναμικών συστημάτων από τις χρονοσειρές.

Ιστορικά αναφέρουμε ότι ο Whitney [138] έδειξε ότι μια γενικευμένη λεία απεικόνιση F από μια d -διάστατη λεία και συμπαγή πολλαπλότητα M στο R^{2d+1} είναι στην πραγματικότητα ένας διαφορομορφισμός (diffeomorphism) στο M . Γενικότερα οι Sauer, York και Casdagli [110] γενίκευσαν την ισχύ του προηγούμενου για την πολλαπλότητα M για ένα συμπαγές αναλλοίωτο σύνολο $A \subseteq R^k$ που μπορεί να έχει μη ακέραια διάσταση καταμέτρησης κύβων (box-counting). Ο Takens [121] ερεύνησε μια συγκεκριμένη κλάση απεικονίσεων που καλούνται απεικονίσεις με καθυστερήσεις ως συντεταγμένες. Μια απεικόνιση με καθυστερήσεις ως συντεταγμένες κατασκευάζεται από μια χρονοσειρά μιας μόνο μετρούμενης ποσότητας. Ο Takens έδειξε ότι εάν το δυναμικό σύστημα και η μετρούμενη ποσότητα είναι γενικές, τότε η απεικόνιση με καθυστερήσεις ως συντεταγμένες από μια d -διάστατη λεία και συμπαγή πολλαπλότητα M στο R^{2d+1} είναι ένας διαφορομορφισμός στο M . Οι Sauer, York και Casdagli [110] γενίκευσαν τα αποτελέσματα του Takens. Συγκεκριμένα, αντικατέστησαν την υπόθεση της γενικότητας με την υπόθεση πιθανότητα ένα και την πολλαπλότητα M με ένα πιθανό σύνολο fractal. Επομένως, για ένα συμπαγές αναλλοίωτο υποσύνολο $A \subseteq R^k$, κάτω από χαλαρές υποθέσεις για το δυναμικό σύστημα, σχεδόν κάθε απεικόνιση καθυστερήσεων συντεταγμένων από το R^k στο R^n είναι $1 - 1$ στο A , δεδομένου ότι $n > 2 \cdot \text{boxdim}(A)$, όπου με $\text{boxdim}(A)$ συμβολίζεται η διάσταση καταμέτρησης κύβων. Επίσης, οποιαδήποτε δομή πολλαπλότητας εντός του A θα διατηρηθεί στο $F(A)$. Τα αποτελέσματα αυτά ισχύουν για μικρότερες διαστάσεις καταμέτρησης κύβων, εάν η boxdim δεν υπάρχει. Ο περικλείων χώρος R^k μπορεί να αντικατασταθεί από μια k -διάστατη ομαλή πολλαπλότητα στη γενική περίπτωση. Επιπρόσθετα, είναι συγκεκριμένες οι υποθέσεις στο δυναμικό σύστημα (διακριτό ή συνεχές) που απαιτούνται για να εξασφαλίσουν ότι η απεικόνιση καθυστερήσεων συντεταγμένων δίνει μια εμβάπτιση. Συγκεκριμένα, μόνο η υπόθεση C^1 λεία είναι απαραίτητη. Για συνεχούς χρόνου συστήματα, η καθυστέρηση πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε να μην υπάρχουν καθόλου περιοδικές τροχιές των οποίων η περίοδος ισούται ακριβώς με το χρησιμοποιούμενο χρόνο καθυστέρησης ή με το διπλάσιό του.

4.1 Το Θεώρημα Εμβάπτισης του Takens

Το Θεώρημα Εμβάπτισης του Takens αποτελεί τη θεωρητική βάση για την ανάλυση των χρονοσειρών που παράγονται από μη γραμμικά ντετερμινιστικά δυναμικά συστήματα. Στην ουσία λέει ότι εάν διαθέτουμε μια βαθμωτή παρατηρήσιμη ποσότητα ϕ της καταστάσεως X ενός ντετερμινιστικού δυναμικού συστήματος, τότε τυπικά μπορούμε να ανακατασκευάσουμε ένα αντίγραφο του αρχικού συστήματος θεωρώντας τις ομάδες $(\phi(X(t)), \phi(X(t+\tau)), \phi(X(t+2\tau)), \dots, \phi(X(t+(d-1)\tau))$ των d διαδοχικών παρατηρήσεων της ϕ , όπου το d είναι αρκούντως μεγάλο. Με $X(t)$ συμβολίζεται η κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή t και $\tau > 0$ είναι κάποιο διάστημα δειγματοληψίας. Επειδή, αντίθετα με το $X(t)$ που είναι συνήθως άγνωστο, η $\phi(X(t))$ είναι στη πράξη μετρήσιμη ποσότητα, το αποτέλεσμα αυτό έχει οδηγήσει σε εφαρμογές σε ένα ευρύ πλήθος πεδίων, που ενδεικτικά περιλαμβάνουν τη δυναμική των ρευστών, τη βιολογία, την ιατρική και τα οικονομικά. Συγκεκριμένα, έχει οδηγήσει αφενός μεν στην επαναξέταση παλαιών δεδομένων και αφετέρου στο σχεδιασμό και την εκτέλεση νέων πειραμάτων με στόχο την ανίχνευση και ίσως την εκμετάλλευση της ντετερμινιστικής συμπεριφοράς χρονοσειρών, οι οποίες κατά το παρελθόν είχαν θεωρηθεί τυχαίες. Μάλιστα, μπορεί να πει κανείς ότι το θεώρημα αυτό έδωσε ώθηση σε ένα νέο κλάδο της μη γραμμικής δυναμικής, που συχνά καλείται χαοτική ανάλυση χρονοσειρών.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται αναλυτικά το Θεώρημα του Takens. Όπως έχει αναφερθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, η συμπεριφορά πολλών πραγματικών συστημάτων συχνά περιγράφεται από ένα ντετερμινιστικό πεπερασμένης διάστασης δυναμικό σύστημα. Με αυτή την ορολογία εννοούμε ότι η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται οποιαδήποτε δεδομένη χρονική στιγμή από ένα σημείο X που βρίσκεται σε μια m -διάστατη πολλαπλότητα M , η οποία συχνά είναι $M \subseteq \mathbb{R}^d$. Η χρονική εξέλιξη της κατάστασης αυτής περιγράφεται από μία απεικόνιση $f^t : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ έτσι ώστε, εάν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση X τη χρονική στιγμή t , τότε βρίσκεται στην κατάσταση $f^2(X)$ τη χρονική στιγμή $t+2$. Στις περισσότερες περιπτώσεις η f^2 δίνεται από τη λύση κάποιας κανονικής διαφορικής εξίσωσης στο M .

Στις περισσότερες πρακτικές καταστάσεις δεν έχουμε πρόσβαση στην κατάσταση X και μπορούμε μερικώς να παρατηρήσουμε κάποια συνάρτηση $\phi(X)$ αυτής. Η $\phi : M \rightarrow \mathcal{R}$ καλείται συνάρτηση μέτρησης και αντιστοιχεί στη μέτρηση κάποιας παρατηρήσιμης ιδιότητας του συστήματος, όπως η θέση ή η θερμοκρασία. Η εξέλιξη της ποσότητας αυτής με το χρόνο δίνεται από την $\phi(f^t(X_0))$, όπου X_0 το διάνυσμα αρχικής κατάστασης. Βέβαια στην πράξη μπορούμε να την παρατηρήσουμε μόνο σε διακριτά χρονικά διαστήματα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι τα διαστήματα αυτά είναι ίσα μεταξύ τους, έτσι ώστε στην πραγματικότητα παρατηρούμε την ακολουθία $\phi_n = \phi(X_n)$ για $n = 1, 2, \dots$, όπου $X_n = f^{n\tau}(X_0)$ και $\tau > 0$ το διάστημα δειγματοληψίας. Η $\{\phi_n\}$ αποτελεί τη χρονοσειρά. Αλλάζοντας την κλίμακα του χρόνου μπορούμε να υποθέσουμε $\tau = 1$, έτσι ώστε η ακολουθία καταστάσεων $\{X_n\}$ δίνεται από το διακριτό δυναμικό σύστημα $X(n+1) = f(X(n))$, όπου $f = f^1$ και η f^n είναι η σύνθεση n φορές της f .

Η παρατηρούμενη μέτρηση ϕ_n είναι μονοδιάστατη, ενώ η κατάσταση X_n εν γένει βρίσκεται σε κάποιον υψηλότερης διάστασης χώρο. Εκ πρώτης όψεως, μπορεί να φαίνεται ότι η ϕ_n περιέχει σχετικά λιγότερη πληροφορία για τη συμπεριφορά της X_n και επίσης ότι η ϕ_n έχει μικρή χρησιμότητα, αφού η ϕ_n προέρχεται από τη ντετερμινιστική διαδικασία ϕ_n . Ωστόσο, το Θεώρημα Εμβάπτισης του Takens [121] αποδεικνύει ότι για τυπικές περιπτώσεις των f και ϕ είναι δυνατόν να ανακατασκευαστεί η f από τις παρατηρούμενες χρονοσειρές μέχρι κάποια (άγνωστη) λεία αλλαγή συνεταγμένων.

Ακριβέστερα, ας θεωρήσουμε κάποια σταθερή ποσότητα d (την οποία καλούμε διάσταση εμβάπτισης) και ας ορίσουμε την απεικόνιση εμβάπτισης καθυστερήσεων $\Phi_{f,\phi} : M \rightarrow \mathcal{R}^d$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$\Phi_{f,\phi}(x) = (\phi(x) \quad \phi(f(x)) \quad \dots \quad \phi(f^{d-1}(x))) \quad (4.1)$$

Ας υποθέσουμε ότι το M είναι συμπαγές. Έστω $\mathcal{D}^r(M)$ το σύνολο των \mathcal{C}^r διαφορομορφισμών

του M και $C^r(M, \mathcal{R})$ το σύνολο των συναρτήσεων παρατήρησης στο M . Και τα δύο σύνολα είναι προικισμένα με την C^r τοπολογία. Ένα υποσύνολο $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}^r(M) \times C^r(M, \mathcal{R})$ καλείται υπόλοιπο (residual), εάν περιλαμβάνει μια μετρήσιμη τομή ανοικτών πυκνών συνόλων. Αφού τα $\mathcal{D}^r(M)$ και $C^r(M, \mathcal{R})$ είναι και τα δύο χώροι Baire, ένα τέτοιο σύνολο είναι πυκνό. Μια ιδιότητα που ισχύει σε ένα υπόλοιπο καλείται γενική (generic) και αποτελεί μια από τις πλέον συνήθεις χρησιμοποιούμενες έννοιες του τυπικού στο χώρο των δυναμικών συστημάτων. Τέλος, μια λεία απεικόνιση $\Psi : M \rightarrow N$ μεταξύ των πολλαπλοτήτων M και N καλείται εμβάπτιση, εάν η αντιστοιχία του M στην εικόνα του είναι διαφορομορφισμός. Εάν το M είναι συμπαγές αυτό είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι και η Ψ και η παράγωγός της $T_X \Psi$ είναι π.χ. $1 - 1$ σε όλο το M .

Το Θεώρημα Εμβάπτισης του Takens [121] διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 4.1:

Εστω M μια συμπαγής m -διάστατη διαφορική πολλαπλότητα. Εάν $d \geq 2m + 1$, τότε το σύνολο των (f, ϕ) για το οποίο η απεικόνιση $\Phi_{f, \phi}$ είναι μια εμβάπτιση είναι ανοικτό και πυκνό στο $\mathcal{D}^r(M) \times C^r(M, \mathcal{R})$ για $r \geq 1$. ■

Μια ασθενέστερη μορφή του θεωρήματος αυτού αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τον Aeyels [2]. Αποδεικνύεται ότι είναι δυνατό να δοθεί ένας απλός χαρακτηρισμός του συνόλου των f για τις οποίες η $\Phi_{f, \phi}$ είναι μια εμβάπτιση. Αυτό προκύπτει από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 4.2:

Εστω ότι η $f \in \mathcal{D}^r(M)$ έχει μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος περιοδικών τροχιών περιόδου μικρότερης από d και ότι οι ιδιοτιμές κάθε τέτοιας περιοδικής τροχιάς είναι διακριτές. Εάν $d \geq 2m + 1$, τότε υπάρχει ένα ανοικτό και πυκνό σύνολο $\phi \in C^r(M, \mathcal{R})$ για τις οποίες η $\Phi_{f, \phi}$ είναι μια εμβάπτιση. ■

Σημειώνεται ότι οι απεικονίσεις f που ικανοποιούν τις συνθήκες του θεωρήματος αυτού είναι ανοικτές και πυκνές στο $\mathcal{D}^r(M)$. Οι συνθήκες για τις ιδιοτιμές μπορεί να φαίνονται λίγο παράξενες, αλλά είναι στην πραγματικότητα απαραίτητες για την εμβάπτιση. Συγκεκριμένα, είναι εύκολο να δει κανείς ότι εάν η $f \in \mathcal{D}^r(M)$ έχει ένα σταθερό σημείο $X \in M$ τέτοιο ώστε η $T_X f$ να έχει δύο γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα με την ίδια ιδιοτιμή, τότε η $\Phi_{f, \phi}$ αποτυγχάνει να είναι μια εμβάπτιση στο $X \forall \phi \in C^r(M, \mathcal{R})$. Γενικότερα, εάν το X είναι ένα περιοδικό σημείο περιόδου $q < d$, τότε η $\Phi_{f, \phi}$ αποτυγχάνει να είναι μια εμβάπτιση στο X εάν υπάρχουν περισσότερα από q γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του $T_X f^q$ με την ίδια ιδιοτιμή.

Το Θεώρημα 4.1 περιέχει τη βάση για την πλειοψηφία των αριθμητικών μεθόδων που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση χρονοσειρών από μη γραμμικά ντετερμινιστικά δυναμικά συστήματα. Υπονοεί ότι για τυπικά f και ϕ , η εικόνα $\Phi(M)$ του M υπό την $\Phi = \Phi_{f, \phi}$, είναι εντελώς ισοδύναμη με το M αυτό καθαυτό, εκτός από τη λεία αντιστρέψιμη αλλαγή συντεταγμένων που δίνεται από την Φ . Επιπλέον, αφού η Φ έχει ένα λείο αντίστροφο μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση $F = \Phi \circ f \circ \Phi^{-1}$ στο $\Phi(M)$. Τότε η F παρουσιάζει την ίδια δυναμική με την f , αλλά στις νέες συντεταγμένες που δίνονται από την αλλαγή συντεταγμένων Φ . Συγκεκριμένα, όλες οι ιδιότητες ανεξαρτησίας συντεταγμένων των F και f θα είναι ταυτόσημες. Αυτό συμπεριλαμβάνει χαρακτηριστικά, όπως ο αριθμός και οι τοπολογικοί τύποι σταθερών σημείων, περιοδικών τροχιών και άλλων αναλλοίωτων συνόλων, καθώς και γεωμετρικά αναλλοίωτα, όπως οι ιδιοτιμές σταθερών και περιοδικών σημείων, η διάσταση συσχετισμού καθώς και οι εκθέτες Lyapunov των αντίστοιχων αναλλοίωτων μέτρων (τους οποίους θα αναπτύξουμε στο επόμενο κεφάλαιο). Επομένως, μπορεί να μετρήσει κανείς ποσότητες όπως η διάσταση συσχετισμού ή οι εκθέτες Lyapunov της F και να είναι βέβαιος ότι αυτές είναι ίδιες με εκείνες του αρχικού αγνώστου συστήματος f . Η σπουδαιότητα του θεωρήματος είναι ότι αυτά τα αναλλοίωτα του F μπορεί να εκτιμηθούν κατευθείαν από τις παρατηρούμενες χρονοσειρές $\{\phi_n\}$ και αυτό γιατί εάν ορίσουμε το σημείο $z_n \in \mathcal{R}^d$ από τις συντεταγμένες καθυστερήσεων $z_n = (\phi_n \ \phi_{n+1} \ \cdots \ \phi_{n+d-1})$ τότε

$$\begin{aligned} z_n &= (\phi(f^n(X_0)) \ \phi(f^{n+1}(X_0)) \ \cdots \ \phi(f^{n+d-1}(X_0))) \\ &= (\phi(X_n) \ \phi(f(X_n)) \ \cdots \ \phi(f^{d-1}(X_n))) \\ &= \Phi(X_n) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Επομένως η ποσότητα z_n ανήκει στην εικόνα του Φ και έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε την F σε αυτή:

$$F(z_n) = \Phi \circ f \circ \Phi^{-1}(z_n) = \Phi \circ f \circ \Phi^{-1}(\Phi(X_n)) = \Phi \circ f(X_n) = \Phi(X_{n+1}) = z_{n+1} \quad (4.3)$$

Έτσι η δυναμική του F στο $\Phi(M)$ απλά αποτελείται από d ολισθαίνοντα κατά ένα χρονικό βήμα διαδοχικά στοιχεία της χρονοσειράς $\{\phi_n\}$, δηλαδή $F(\phi_n \ \phi_{n+1} \ \cdots \ \phi_{n+d-1}) = (\phi_{n+1} \ \phi_{n+2} \ \cdots \ \phi_{n+d})$. Όπως σημειώθηκε προηγούμενα αυτό είναι εντελώς ισοδύναμο με την αρχική δυναμική $X_{n+1} = f(X_n)$ (μέχρι την αλλαγή συντεταγμένων Φ) και όλες οι ιδιότητες αναλλοίωτου συντεταγμένων των F και f είναι ταυτόσημες. Αν και η αρχική δυναμική είναι μη παρατηρήσιμη, η δυναμική ως προς τα F και z_n εκφράζεται καθαρά ως προς την παρατηρούμενη χρονοσειρά $\{\phi_n\}$. Έτσι, εάν έχουμε ένα δείγμα από την $\{\phi_n\}$, μπορούμε να εξάγουμε πολλές από τις ιδιότητες της F και επομένως της f . Συνοπτικά, το Θεώρημα του Takens μας επιτρέπει να ανακατασκευάσουμε το άγνωστο δυναμικό σύστημα από το οποίο προέρχεται η χρονοσειρά με την απλή κατασκευή ενός νέου χώρου καταστάσεων χρησιμοποιώντας διαδοχικές παρατηρήσεις της χρονοσειράς.

Υπάρχουν βέβαια πολλά πρακτικά εμπόδια που πρέπει να υπερπηδήσει κανείς όταν αντιμετωπίζει το θέμα στην πράξη. Για παράδειγμα, συνήθως δε γνωρίζουμε το m και κατά συνέπεια δε γνωρίζουμε ποια τιμή της διάστασης εμφάνισης d πρέπει να χρησιμοποιήσουμε. Παρόμοια η επιλογή του διαστήματος δειγματοληψίας τ μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την απόδοση των πρακτικών τεχνικών. Οι δυσκολίες αυτές μπορούν ωστόσο να υπερπηδηθούν ως ένα βαθμό, όπως φαίνεται στις επόμενες παραγράφους.

Η ύπαρξη της F επίσης υπονοεί ότι η χρονοσειρά $\{\phi_n\}$ είναι πλήρως ντετερμινιστική: επαναλαμβάνοντας την F βλέπουμε ότι οι d διαδοχικές τιμές $\phi_n, \phi_{n+1}, \dots, \phi_{n+d-1}$ της χρονοσειράς καθορίζουν πλήρως όλες τις μελλοντικές τιμές $\phi_{n+d}, \phi_{n+d+1}, \dots$. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να είναι δυνατή η πρόβλεψη της μελλοντικής συμπεριφοράς της $\{\phi_n\}$. Συγκεκριμένα, εάν θεωρήσουμε την απεικόνιση F , τότε τα πρώτα $d-1$ δείγματα είναι τετριμμένα: αποτελούνται από απλή ολίσθηση των ορισμάτων της F κατά ένα χρονικό βήμα. Ας συμβολίσουμε την τελευταία συνιστώσα της F με $G: \Phi(M) \rightarrow \mathcal{R}$. Τότε είναι $G(\phi_n \ \phi_{n+1} \ \cdots \ \phi_{n+d-1}) = \phi_{n+d}$ ή με άλλα λόγια το G απλά προβλέπει τη χρονοσειρά $\{\phi_n\}$ ένα βήμα εμπρός. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία αυτή μπορούμε εν γένει να προβλέψουμε τα $\phi_{n+d+1}, \phi_{n+d+2}, \dots$ (παρόλο που εάν η f , και επομένως και η F , είναι χαοτική τότε υπάρχει ένα άνω όριο στο πόσο μακριά στο μέλλον μπορούμε να προβλέψουμε στην πράξη). Βέβαια, συνήθως δεν ξέρουμε το G , αλλά μπορούμε να το εκτιμήσουμε από ένα δείγμα της χρονοσειράς. Αυτό όχι μόνο είναι από μόνο του χρήσιμο, αλλά αποτελεί επίσης τη βάση για μια ποικιλία τεχνικών για τη μείωση του θορύβου, το διαχωρισμό σημάτων, τον έλεγχο και τον συγχρονισμό.

Ωστόσο, για να ισχύει το Θεώρημα του Takens πρέπει να υποθέσει κανείς και ότι η δυναμική είναι ντετερμινιστική (δηλαδή ότι υπάρχει κάποια απεικόνιση f τέτοια ώστε $X(t+1) = f(X(t))$ και ότι και η δυναμική και οι παρατηρήσεις είναι αυτόνομες (δηλαδή ότι και το f και το ϕ εξαρτώνται ρητά μόνο από την κατάσταση X). Δυστυχώς οι υποθέσεις αυτές δεν ισχύουν σε πολλές εφαρμογές. Τα περισσότερα πραγματικά συστήματα είναι ενθόρυβα, τουλάχιστον σε κάποια έκταση. Ο θόρυβος αυτός μπορεί να εμφανίζεται και στη δυναμική και στις παρατηρήσεις, σε κάθε περίπτωση πάντως το Θ . Takens δεν εφαρμόζεται. Επιπλέον, ακόμη και αν ο θόρυβος είναι αρκούντως χαμηλός ώστε να μπορεί να αγνοηθεί, πολλά ντετερμινιστικά συστήματα δεν είναι αυτόνομα. Για παράδειγμα, στο εργαστήριο συχνά εξαναγκάζεται ένα πειραματικό σύστημα ώστε να εμφανίσει μια ενδιαφέρουσα συμπεριφορά, ενώ στην περίπτωση των φυσικά εξελισσόμενων συστημάτων είναι πολύ σπάνιο να καταστεί δυνατή η απομόνωση του συστήματος ώστε να εξασφαλιστεί η μη ύπαρξη εξωτερικών επιρροών. Τέλος, πολλά συστήματα στο χώρο του ελέγχου και των επικοινωνιών σχεδιάζονται για να επεξεργαστούν μια ελεύθερη είσοδο και επομένως δεν μπορούν να θεωρηθούν ως αυτόνομα.

4.2 Εμβάπτιση χρόνου

Σύμφωνα με τα παραπάνω, αρχικά υποθέτουμε ότι η μετρούμενη χρονοσειρά είναι μια λεία συνάρτηση όλων των μεταβλητών του φασικού χώρου, $h(t) = \phi(X(t))$. Επίσης, η ίδια πληροφορία που παρέχεται από το σύνολο των m μεταβλητών του φασικού χώρου, $X = (X_1 \ X_2 \ \dots \ X_m)$ παρέχεται και από τις παραγώγους οποιασδήποτε από τις μεταβλητές αυτές μέχρι τάξεως $m - 1$, δηλαδή από το διάνυσμα $(X_j \ \frac{dX_j}{dt} \ \frac{d^2X_j}{dt^2} \ \dots \ \frac{d^{m-1}X_j}{dt^{m-1}})$, με δεδομένο το γεγονός ότι η X_j αλληλεπιδρά με όλες τις υπόλοιπες μεταβλητές του φασικού χώρου. Αυτά επεκτείνονται στην περίπτωση του πειράματος με τη διαπίστωση ότι παρόμοια πληροφορία παρέχεται από το σήμα $h(t)$ και τις χρονικές παραγώγους του, δηλαδή από το $(h \ \frac{dh}{dt} \ \frac{d^2h}{dt^2} \ \dots)$. Ωστόσο, εφόσον το σήμα μας αποτελείται από μετρήσεις σε διακριτά χρονικά διαστήματα, η πρώτη παράγωγος είναι στην πραγματικότητα η $\frac{h(t)-h(t-\tau)}{\tau}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα του Takens χρησιμοποιούμε τις μεταβλητές με χρονική καθυστέρηση, δηλαδή τις $Z = (h(t) \ h(t-\tau) \ h(t-2\tau) \ \dots)$ για την προσεγγιστική αναπαράσταση του φασικού χώρου του συστήματος. Η προσέγγιση αυτή καλείται εμβάπτιση και ο χώρος που παράγεται από την h και τις καθυστερήσεις της ονομάζεται χώρος εμβάπτισης. Η διάσταση του χώρου αυτού είναι η διάσταση εμβάπτισης.

Για χρονοσειρές απείρου μήκους και πεπερασμένης διασποράς, σύμφωνα με τα προηγούμενα, ο Takens [121] απέδειξε ότι υπάρχει διαφορομορφική ισοδυναμία μεταξύ των X και Z . Στην περίπτωση αυτή, η συγκεκριμένη τιμή της χρονικής καθυστέρησης δεν είναι σημαντική. Για χρονοσειρές πεπερασμένου μήκους, η προηγούμενη διαδικασία είναι απαραίτητα ευριστική και η επιλογή της τιμής της χρονικής καθυστέρησης γίνεται σημαντική.

Γενικά, η διαδικασία που ακολουθείται στην ανάλυση χρονοσειρών βασίζεται στην ιεραρχία των χώρων εμβάπτισης με αύξουσα διάσταση. Σε καθένα από τους χώρους αυτούς υπολογίζονται μερικά σχετικά δυναμικά μεγέθη, όπως η διάσταση του υποτιθέμενου υπάρχοντος ελκυστή, ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov κλπ, μέχρι να παρουσιαστεί κορεσμός στην τιμή τους. Δηλαδή, κορεσμός επιτυγχάνεται όταν η τιμή της επιλεγμένης δυναμικής ποσότητας δε μεταβάλλεται με την αύξηση της διάστασης εμβάπτισης m , πέρα από μια τιμή κόρου m_s . Στην περίπτωση αυτή θεωρείται ότι η m_s παρέχει πληροφορίες για τη διάσταση του αληθινού φασικού χώρου του συστήματος και η τιμή της δυναμικής ποσότητας που υπολογίστηκε προσεγγίζει την αληθινή τιμή της, δεδομένου ότι επιλέχθηκε μια ποσότητα που είναι αναλλοίωτη σε αλλαγές συντεταγμένων του φασικού χώρου. Και ενώ η προσδοκία αυτή είναι αιτιολογημένη για μεγάλες χρονοσειρές που παράγονται από χαμηλής διάστασης δυναμικά συστήματα, η προσέγγιση εμβάπτισης συχνά εφαρμόζεται σε βραχείς χρονοσειρές αγνώστου προέλευσης. Στην περίπτωση αυτή, προβλήματα μπορούν εύκολα να εμφανιστούν και να προκύψουν εσφαλμένα αποτελέσματα.

4.3 Προσδιορισμός της χρονικής καθυστέρησης

Ένα πολύ σημαντικό βήμα στη διαδικασία της χρονικής εμβάπτισης είναι η επιλογή της χρονικής καθυστέρησης. Το θεώρημα εμβάπτισης δεν καθορίζει την επιλογή της χρονικής καθυστέρησης που θα χρησιμοποιηθεί στην κατασκευή d -διάστατων διανυσμάτων δεδομένων. Στην πραγματικότητα, επιτρέπει οποιαδήποτε χρονική καθυστέρηση, εκτός από τα συγκεκριμένα πολλαπλάσια της ακριβούς περιόδου ενός περιοδικού σήματος [110], εφόσον διατίθεται μια άπειρη ποσότητα δεδομένων άπειρης ακρίβειας. Στην πράξη βέβαια, τα πειραματικά δεδομένα δεν είναι ούτε άπειρα ούτε άπειρης ακρίβειας. Εξαιτίας της απουσίας οποιουδήποτε σχετικού θεωρήματος, πρέπει να περιοριστούμε στην επιλογή της χρονικής καθυστέρησης χρησιμοποιώντας κάποια κριτήρια βελτιστοποίησης. Πιο συγκεκριμένα, πρέπει για ευνόητους λόγους να είναι πολλαπλάσια του χρονικού διαστήματος δειγματοληψίας. Επίσης, εάν η χρονική καθυστέρηση είναι πολύ μικρή, τότε οι συντεταγμένες $h(n)$ και $h(n + \tau)$ που επιθυμούμε να χρησιμοποιήσουμε για την ανακατασκευή δε

θα είναι αρκετά ανεξάρτητες. Δηλαδή δε θα έχει παρέλθει αρκετός χρόνος ώστε το σύστημα να έχει εξελιχθεί αρκετά στο φασικό χώρο ώστε να παράγει με την πρακτικά αριθμητική έννοια νέες πληροφορίες σχετικά με το φασικό χώρο. Ως αποτέλεσμα, πληθυσμοί σημείων συγκεντρώνονται κατά μήκος της διαγωνίου του ανακατασκευασμένου χώρου και η δυναμική δεν μπορεί να ξεδιπλωθεί κατάλληλα. Αντίθετα, αφού τα χαοτικά συστήματα είναι από τη φύση τους ασταθή, πολύ μεγάλες τιμές του τ οδηγούν σε απώλεια συσχέτισης μεταξύ των διαφόρων μεταβλητών του φασικού χώρου με αποτέλεσμα την απώλεια πληροφορίας. Επομένως, αυτό που χρειαζόμαστε είναι η επιλογή του τ σε ένα διάστημα τέτοιο ώστε να είναι μεν αρκετά μεγάλο ώστε τα $h(n)$, $h(n + \tau)$, \dots να είναι μάλλον ανεξάρτητα, αλλά όχι τόσο μεγάλο ώστε τα $h(n)$, $h(n + \tau)$, \dots να είναι πλήρως ασυσχέτιστα. Επιδιώκουμε μάλιστα η επιλογή μας να στηρίζεται σε κάποια ιδιότητα του συστήματος το οποίο επιθυμούμε να περιγράψουμε.

Παραδοσιακές επιλογές του τ είναι οι ακόλουθες:

- $\tau = \frac{T_0}{4}$, εάν υπάρχει μια κύρια περίοδος T_0 στο σήμα
- το πρώτο μηδενικό της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης

$$R(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(t)h(t+s)dt$$

όπου $h(t)$ το υπό μελέτη σήμα.

- το πρώτο ελάχιστο της συνάρτησης αμοιβαίας πληροφορίας [37]

$$I(\tau) = \sum_{h_1, h_2} \rho_{j0}(h_1, h_2; \tau) \log_2 \left[\frac{\rho_{j0}(h_1, h_2; \tau)}{\rho(h_1)\rho(h_2)} \right] \quad (4.4)$$

όπου $\rho(h)$ είναι η πιθανότητα παρατήρησης της τιμής h και $\rho_{j0}(h_1, h_2; \tau)$ είναι η συνδυασμένη πιθανότητα παρατήρησης της τιμής h_1 , σε κάποια χρονική στιγμή και της τιμής h_2 με κάποια χρονική καθυστέρηση τ , αργότερα.

- μέθοδος Rosenstein Η μέθοδος στηρίζεται σε γεωμετρικά κριτήρια και υπολογίζει την τιμή του τ για την οποία η ανακατασκευή εκτείνεται αρκετά ικανοποιητικά μακριά από τη διαγώνιο του φασικού χώρου, όπως θα δούμε στην ενότητα 4.3.2

Γενικά, είναι σημαντικό να επιβεβαιώσει κανείς ότι τα αποτελέσματα της ανάλυσής του δεν εξαρτώνται τόσο πολύ από την ακριβή επιλογή του τ . Δηλαδή, ότι τα αποτελέσματά του δε μεταβάλλονται σημαντικά για ένα αρκετά μεγάλο εύρος τιμών της χρονικής καθυστέρησης με κέντρο τη βέλτιστη τιμή που προσδιορίζεται με μια από τις προαναφερθείσες μεθόδους.

4.3.1 Αμοιβαία πληροφορία

Τα ευσταθή γραμμικά συστήματα παράγουν μηδενική πληροφορία. Η επιλογή της παραγωγής πληροφορίας ως κρίσιμης ιδιότητας των μη γραμμικών συστημάτων, μας εξασφαλίζει εξ αρχής ότι η ποσότητα στην οποία εστιάζουμε είναι ιδιότητα της μη γραμμικής δυναμικής που δεν είναι και ιδιότητα της γραμμικής εξέλιξης.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, σε ένα σύστημα που εμφανίζει χαοτική δυναμική δύο γειτονικά σημεία στο φασικό χώρο απομακρύνονται εκθετικά με την πάροδο του χρόνου. Ας υποθέσουμε ότι η διακριτική ικανότητά μας στο φασικό χώρο είναι σταθερή και πεπερασμένη R , δηλαδή δεν μπορούμε να διακρίνουμε σημεία που βρίσκονται εντός μιας σφαίρας ακτίνας R . Τα όρια στην ανάλυση μπορεί να οφείλονται στα όργανα μέτρησης ή στο περιβάλλον. Έστω λοιπόν δύο σημεία

$x'(t)$ και $x''(t)$ που βρίσκονται εντός της σφαίρας τη χρονική στιγμή t και δεν μπορούν να διακριθούν από τις μετρήσεις μας. Κάποια χρονική στιγμή αργότερα t' , η απόσταση μεταξύ των σημείων έχει τυπικά αυξηθεί σε $|x'(t') - x''(t')| \simeq |x'(t) - x''(t)| e^{\lambda|(t'-t)|}$, $\lambda > 0$. Όταν η απόσταση αυτή υπερβεί την τιμή R , τότε πειραματικά μπορούμε να ξεχωρίσουμε τα $x'(t')$ και $x''(t')$. Έτσι η αστάθεια αποκάλυψε πληροφορίες σχετικά με τον πληθυσμό του φασικού χώρου που δεν ήταν διαθέσιμες σε προηγούμενες χρονικές στιγμές. Επομένως, η παραγωγή πληροφορίας μπορεί να έχει βασικό ενδιαφέρον στη μελέτη του μη γραμμικού δυναμικού συστήματος.

Ορίζουμε ως μέση αμοιβαία πληροφορία μεταξύ δύο μετρήσεων $x(n)$ και $x(n+T)$ την ποσότητα

$$I(T) = \sum_{x(n), x(n+T)} P(x(n), x(n+T)) \log_2 \frac{P(x(n), x(n+T))}{P(x(n)) \cdot P(x(n+T))}$$

όπου $P(x(n), x(n+T))$ είναι η συνδυασμένη πιθανότητα των δύο μετρήσεων και $P(x(n))$ η πιθανότητα της μέτρησης $x(n)$. Η μέση αμοιβαία πληροφορία εκφράζει την ποσότητα σε bits της πληροφορίας που προκύπτει για τα $x(n)$ από τις μετρήσεις των $x(n+T)$.

Οι Fraser et al. [37] πρότειναν τη χρήση της συνάρτησης $I(T)$ ως ένα είδος μη γραμμικής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης για τον καθορισμό του χρόνου κατά τον οποίο οι τιμές των $x(n)$ και $x(n+T)$ είναι αρκετά ανεξάρτητες μεταξύ τους ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως συντεταγμένες του διανύσματος εμβάπτισης, αλλά όχι τόσο ανεξάρτητες ώστε να μην έχουν καμιά σύνδεση μεταξύ τους. Η πρότασή τους είναι ο προσδιορισμός του τ ως του πρώτου ελαχίστου της συνάρτησης της μέσης αμοιβαίας πληροφορίας. Η επιλογή του πρώτου ελαχίστου θυμίζει την επιλογή του χρόνου καθυστέρησης ως του πρώτου μηδενισμού της γραμμικής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης. Η επιλογή αυτή είναι η βέλτιστη γραμμική από τη σκοπιά της προβλεψιμότητας του $x(n+T)$ από τη γνώση του $x(n)$ με βάση το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων. Ωστόσο η σχέση της γραμμικής αυτής επιλογής με τη μη γραμμική διαδικασία που συσχετίζει τα $x(n)$ και $x(n+T)$ δεν είναι καθόλου σαφής, γι' αυτό και η επιλογή του πρώτου μηδενισμού δεν συνιστάται.

Η μέση αμοιβαία πληροφορία αποκαλύπτει αρκετά διαφορετικές πληροφορίες για τα μη γραμμικά χαρακτηριστικά της παρατηρούμενης χρονοσειράς από ό,τι η γραμμική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης. Η τελευταία σχετίζεται με τις γραμμικές ιδιότητες της πηγής. Μια πολύ καλή ιδιότητα της μέσης αμοιβαίας πληροφορίας είναι το αναλλοίωτο κάτω από τις λείες αλλαγές του συστήματος των συντεταγμένων. Αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα $I(T)$ που υπολογίζεται στο σύστημα των συντεταγμένων καθυστερήσεων παρουσιάζει την ίδια τιμή με το αρχικό αλλά άγνωστο σύστημα συντεταγμένων. Επίσης σημαίνει ότι υπό την παρουσία θορύβου, ο οποίος μεταβάλλει τη θέση των σημείων, η $I(T)$ ίσως είναι περισσότερο ρωμαλέα έναντι του θορύβου από πολλές άλλες ποσότητες.

4.3.2 Μέθοδος Rosenstein

Στην περίπτωση πραγματικών ενθόρυβων, πεπερασμένου το πλήθος, δεδομένων, μικρές τιμές της χρονικής καθυστέρησης τ οδηγούν σε ελάχιστη απόδοση πληροφορίας μεταξύ συντεταγμένων διαδοχικών καθυστερήσεων. Επίσης, η ανακατασκευασμένη τροχιά συμπίπτει κατά μήκος της κύριας διαγωνίου του φασικού χώρου. Για μεγάλες τιμές της τ , οι συντεταγμένες διαδοχικών καθυστερήσεων μπορεί να γίνουν ασυσχέτιστες και η ανακατασκευή δεν είναι πια αντιπροσωπευτική της πραγματικής δυναμικής. Για το σκοπό αυτό αναζητείται η τιμή της καθυστέρησης που προκύπτει από το βέλτιστο συμβιβασμό μεταξύ των δύο προαναφερόμενων φαινομένων. Στα πλαίσια αυτά οι Rosenstein et al. [105] διατύπωσαν μια μέθοδο προσδιορισμού της καθυστέρησης τ στηριζόμενοι σε γεωμετρικά κριτήρια. Η μέθοδος συνίσταται στην εύρεση της τιμής της καθυστέρησης τ για την οποία η ανακατασκευή εκτείνεται αρκετά ικανοποιητικά πέρα από τη διαγώνιο του φασικού χώρου. Για το σκοπό αυτό ορίζεται το μέγεθος της ισχύος της ανακατασκευής, το οποίο

για την περίπτωση δύο διαστάσεων ορίζεται ως

$$RSS(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x(i+\tau) - x(i)|$$

Ας σημειωθεί ότι για λευκό θόρυβο η RSS είναι ανεξάρτητη της καθυστέρησης τ . Γεωμετρικά, η $RSS(\tau)$ είναι το μέτρο της έκτασης του ελκυστή ως συνάρτηση της χρονικής καθυστέρησης. Η απομάκρυνση από την κύρια διαγώνιο υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το μέγεθος της μέσης μετατόπισης $\langle S_M \rangle$ των διανυσμάτων εμβάπτισης από τις αρχικές τους θέσεις στη διαγώνιο. Έτσι, υπολογίζουμε τη $\langle S_M \rangle$ ως συνάρτηση της καθυστέρησης τ :

$$\langle S_M(\tau) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|X^T(i) - X^0(i)\|$$

όπου οι εκθέτες δηλώνουν την καθυστέρηση μεταξύ διαδοχικών συνιστωσών εμβάπτισης. Από τον ορισμό της, η $\langle S_M(\tau) \rangle$ υπολογίζεται ως:

$$\langle S_M(\tau) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{j=1}^{m-1} (X(i+j\tau) - X(i))^2} \quad (4.5)$$

Η $\langle S_M(\tau) \rangle$ αποτελεί την πολυδιάστατη επέκταση του RSS . Καθώς η χρονική καθυστέρηση αυξάνει, η ανακατασκευασμένη τροχιά απομακρύνεται από την κύρια διαγώνιο και η μέση μετατόπιση αυξάνει. Για μεγάλες τιμές της διάστασης εμβάπτισης, η απομάκρυνση πλησιάζει ένα πλατώ. Αυτό αποτελεί ένα γεωμετρικό χαρακτηριστικό που βοηθά στη διατήρηση ενός προσεγγιστικά σταθερού παραθύρου εμβάπτισης για αυξανόμενες τιμές της διάστασης εμβάπτισης.

Η χρονική καθυστέρηση τ υπολογίζεται από τη μεγιστοποίηση της $S_M(\tau)$. Πρακτικά, υπολογίζεται από την πρώτη κλίση της καμπύλης που είναι μικρότερη του 40% της αρχικής τιμής (εξαιρείται η $\langle S_M(0) \rangle$ για τον υπολογισμό της αρχικής κλίσης).

4.4 Προσδιορισμός της διάστασης εμβάπτισης

Για την ανακατασκευή είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός μιας διάστασης η οποία αντιστοιχεί σε αριθμό συντεταγμένων ικανό να ξεδιπλώσει τις παρατηρούμενες τροχιές από αυτοεπικαλύψεις που προκύπτουν από την προβολή του ελκυστή σε χώρο χαμηλότερης διάστασης. Η χαμηλότερη διάσταση που ξεδιπλώνει τον ελκυστή ώστε να μην παραμένει καμία από αυτές τις επικαλύψεις καλείται διάσταση εμβάπτισης, d_E . Η d_E είναι ακέραιος αριθμός, έχει καθολική έννοια και μπορεί να διαφέρει από την τυπική διάσταση της υποκείμενης δυναμικής.

Το θεώρημα εμβάπτισης μας λέει ότι, εάν η διάσταση του ελκυστή είναι d_A , τότε σίγουρα ο ελκυστής ξεδιπλώνεται σε ένα χώρο ακέραιας διάστασης $d_E > 2d_A$. Αυτή δεν είναι η ελάχιστη απαιτούμενη διάσταση αλλά είναι αρκετή και μας καθορίζει το πότε πρέπει να σταματήσουμε να προσθέτουμε συνιστώσες στο διάνυσμα καθυστέρησης. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μερικές από τις δημοφιλέστερες μεθόδους προσδιορισμού της διάστασης εμβάπτισης.

4.4.1 Εσφαλμένα πλησιέστεροι γείτονες

Εστω ότι έχουμε προχωρήσει σε ανακατασκευή του φασικού χώρου στη διάσταση d με διανύσματα

$$X(k) = (x(k) \quad x(k+\tau) \quad \cdots \quad x(k+(d-1)\tau))$$

χρησιμοποιώντας την καθυστέρηση τ που προσδιορίστηκε για παράδειγμα με τη μέθοδο της μέσης αμοιβαίας πληροφορίας. Προσδιορίζουμε τον πλησιέστερο γείτονα στο φασικό χώρο του διανύσματος $X(k)$:

$$X^{NN}(k) = (x^{NN}(k) \quad x^{NN}(k + \tau) \quad \dots \quad x^{NN}(k + (d - 1)\tau))$$

του οποίου ο χρόνος εμφάνισης εν γένει δεν έχει σχέση με τη χρονική στιγμή εμφάνισης k του $X(k)$. Εάν το διάνυσμα $X^{NN}(k)$ είναι πραγματικός γείτονας του $X(k)$, τότε εμφανίζεται στη γειτονιά του $X(k)$ για λόγους δυναμικής. Συγκεκριμένα, είναι είτε το διάνυσμα αμέσως πριν ή αμέσως μετά το $X(k)$ κατά μήκος της τροχιάς, εάν τα βήματα του χρόνου είναι αρκετά μικρά, ή έφτασε στη γειτονιά του $X(k)$ λόγω εξέλιξης της τροχιάς στον ελκυστή. Επειδή οι ελκυστές των πραγματικών φυσικών συστημάτων είναι αρκετά συμπαγείς στο φασικό χώρο, κάθε σημείο του εμφανίζει πολλούς γείτονες όταν το πλήθος των δεδομένων γίνει αρκετά μεγάλο.

Εάν το διάνυσμα $X^{NN}(k)$ είναι ένας εσφαλμένος γείτονας του $X(k)$ που εμφανίστηκε στη γειτονιά του $X(k)$ λόγω προβολής από μεγαλύτερη διάσταση και επειδή η διάσταση d δεν ξεδιπλώνει τον ελκυστή, τότε αυξάνοντας τη διάσταση σε $d + 1$ ίσως να μετακινήσουμε τον εσφαλμένο αυτό γείτονα εκτός της γειτονιάς του $X(k)$. Εξετάζοντας κάθε σημείο $X(k)$ και προσδιορίζοντας τη διάσταση στην οποία μετακινούνται όλοι οι εσφαλμένοι γείτονες, θα μετακινήσουμε διαδοχικά τις τομές των τροχιών από τις χαμηλότερες διαστάσεις, μέχρις ότου, στο τέλος, μετακινήσουμε τις τομές των σημείων. Τότε θα έχουμε προσδιορίσει τη διάσταση d_E που ξεδιπλώνεται ο ελκυστής [64].

Ο προσδιορισμός του εάν ένα σημείο $X(k)$ και ο πλησιέστερος γείτονας του $X^{NN}(k)$ στη διάσταση d είναι κοντά ή μακριά στη διάσταση $d + 1$ γίνεται με τη σύγκριση της $|x(k + d\tau) - x^{NN}(k + d\tau)|$ με την Ευκλείδεια απόσταση $|X(k) - X^{NN}(k)|$ μεταξύ των πλησιέστερων γειτόνων στη διάσταση d . Εάν η πρόσθετη απόσταση είναι μεγάλη σε σύγκριση με την απόσταση στη διάσταση d μεταξύ των πλησιέστερων γειτόνων, τότε έχουμε έναν εσφαλμένο γείτονα. Το τετράγωνο της Ευκλείδειας απόστασης μεταξύ των σημείων των πλησιέστερων γειτόνων στη διάσταση d είναι

$$R_d^2(k) = \sum_{m=1}^d [x(k + (m - 1)\tau) - x^{NN}(k + (m - 1)\tau)]^2$$

ενώ στη διάσταση $d + 1$ είναι

$$R_{d+1}^2(k) = \sum_{m=1}^{d+1} [x(k + (m - 1)\tau) - x^{NN}(k + (m - 1)\tau)]^2 = R_d^2(k) + |x(k + d\tau) - x^{NN}(k + d\tau)|^2$$

Η απόσταση μεταξύ σημείων στη διάσταση $d + 1$ ως προς την απόσταση στη διάσταση d ορίζεται από το πηλίκο:

$$\sqrt{\frac{R_{d+1}^2(k) - R_d^2(k)}{R_d^2(k)}} = \frac{|x(k + d\tau) - x^{NN}(k + d\tau)|}{R_d(k)}$$

Όταν η ποσότητα αυτή είναι μεγαλύτερη από κάποιο κατώφλι τότε έχουμε έναν εσφαλμένο γείτονα. Η πράξη δείχνει ότι για μια σειρά συστημάτων το κατώφλι για τον προσδιορισμό ενός εσφαλμένου γείτονα είναι ένας αριθμός περίπου ίσος με 15. Η τιμή αυτή μεταβάλλεται με τον αριθμό των σημείων για μικρά σύνολα δεδομένων, αλλά μόλις δειγματοληπτηθούν αρκετά όλες οι περιοχές του ελκυστή, η διαφοροποίηση των εσφαλμένων γειτόνων με το πλήθος των δεδομένων είναι πολύ μικρή.

Υπάρχει ένα ακόμη θέμα που αφορά σήματα υψηλής διάστασης όταν το πλήθος των δεδομένων είναι περιορισμένο. Καθώς προχωρούμε προς υψηλότερες διαστάσεις, ο όγκος που καταλαμβάνεται

από τα δεδομένα συγκεντρώνεται στην περιφέρεια του χώρου. Αυτό σημαίνει ότι σήματα υψηλής διάστασης συγκεντρώνονται στις άκρες του χώρου και κανένας πλησιέστερος γείτονας δε θα είναι κοντινός γείτονας. Για να λάβουμε και αυτό υπόψη στο προηγούμενο κριτήριο ενός εσφαλμένου γείτονα, προστίθεται η απαίτηση ότι η πρόσθετη απόσταση καθώς ανεβαίνουμε κατά μία διάσταση δεν είναι μεγαλύτερη από την ονομαστική διάμετρο του ελκυστή. Αυτό σημαίνει ότι εάν ο λόγος

$$\frac{|x(k + d\tau) - x^{NN}(k + d\tau)|}{R_A}$$

είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό της τάξης του 2, τα σημεία $X(k)$ και $X^{NN}(k)$ θεωρούνται ως εσφαλμένοι γείτονες. Με R_A συμβολίζεται η ονομαστική ακτίνα του ελκυστή που ορίζεται ως η RMS τιμή των δεδομένων γύρω από τη μέση τιμή τους. Τα αποτελέσματα προσδιορισμού της d_E είναι μάλλον ανεξάρτητα από τον ακριβή ορισμό του μεγέθους R_A και της τιμής του κατωφλίου.

Εάν χρησιμοποιηθούν δεδομένα από ένα καθαρά χαοτικό σύστημα, αναμένουμε το ποσοστό των εσφαλμένων πλησιέστερων γειτόνων να μειωθεί από σχεδόν 100% στη διάσταση 1 σε αυστηρά μηδέν όταν φτάσουμε στη d_E . Από εκεί και μετά θα παραμένει μηδέν, αφού ο ελκυστής θα έχει ξεδιπλωθεί. Εάν το σήμα έχει παράσιτα, μπορεί τα παράσιτα να έχουν κυριαρχήσει στο σήμα ενδιαφέροντος τόσο ώστε να παρατηρούμε τη διάσταση που απαιτείται για το ξεδίπλωμα των παρασίτων. Εάν τα παράσιτα είναι πολύ υψηλής διάστασης, όπως αναμένει κανείς από το θόρυβο, τότε ίσως να μην παρατηρούμε το ποσοστό των πλησιέστερων γειτόνων να πέφτει κοντά στο μηδέν σε καμία από τις διαστάσεις (για τις οποίες διαθέτουμε αρκετά δεδομένα ώστε να μπορούμε να το εξετάσουμε).

4.4.2 Άλλες μέθοδοι προσδιορισμού της διάστασης εμβάπτισης

Από τότε που αναπτύχθηκε η διαδικασία εμβάπτισης με τη μέθοδο της χρονικής καθυστέρησης, έχουν προταθεί αρκετές μέθοδοι για τον προσδιορισμό της διάστασης εμβάπτισης. Μια πολύ δημοφιλής μέθοδος είναι η αναζήτηση της διάστασης στην οποία το ολοκλήρωμα συσχετισμού γίνεται ανεξάρτητο της διάστασης του ανακατασκευασμένου χώρου [50]. Οι Dinget al. [27] έδειξαν ότι αυτή η ανεξαρτησία εμφανίζεται τυπικά στην ακέραια διάσταση $d > d_A$ και δεν ξεδιπλώνει πάντα τον ελκυστή. Αυτό πρέπει να αποτελέσει προειδοποίηση ότι η διάσταση στην οποία μπορεί να υπολογίσει κανείς ένα μέγεθος ενδιαφέροντος δεν είναι απαραίτητα η ίδια με τη διάσταση στην οποία επιτυγχάνεται η προβλεψιμότητα της υποκείμενης ντετερμινιστικής πηγής.

Μια άλλη απευθείας μέθοδος παρέχεται από την προσέγγιση των Kaplan και Glass [61], οι οποίοι παρατήρησαν ότι όταν ο ελκυστής ξεδιπλώνεται, το ανυσματικό πεδίο που σχετίζεται με την $x(t) \rightarrow x(t + 1)$ δυναμική, δηλαδή η ανυσματική συνάρτηση $f(x)$ έχει μονοσήμαντη κατεύθυνση. Αυτό σημαίνει ότι εάν μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν τοπικό αντιπρόσωπο αυτού του ανυσματικού πεδίου, τότε η κατεύθυνση όλων των ανυσμάτων ροής σε οποιαδήποτε γειτονιά θα δείχνουν στην ίδια διεύθυνση όταν ο ελκυστής ξεδιπλώνεται. Εάν βρισκόμαστε σε μια διάσταση που είναι πάρα πολύ χαμηλή για να ξεδιπλωθεί ο ελκυστής, τότε σε μερικές γειτονιές δύο ή περισσότερες διευθύνσεις του ανυσματικού πεδίου θα διπλωθούν στην κορυφή ή μία της άλλης και η κατεύθυνση του ανυσματικού πεδίου σε αυτές τις γειτονιές δε θα είναι μοναδική. Ο αλγόριθμος αυτός αγγίζει επίσης την ουσία της διαδικασίας εμβάπτισης: αναζητούμε έναν χώρο στον οποίο η κατεύθυνση της εξέλιξης σε κάθε γειτονιά του ελκυστή είναι μονοσήμαντη. Αυτό εξασφαλίζεται από τα θεωρήματα μοναδικότητας των λύσεων της δυναμικής στις αρχικές συντεταγμένες. Εξάλλου, αποτελεί στόχο του θεωρήματος εμβάπτισης η παροχή ενός υποκατάστατου χώρου, όπου η έννοια της εξέλιξης διατηρείται, ώστε η πρόβλεψη σε αυτόν τον χώρο να μπορεί να πραγματοποιηθεί με την ίδια έλλειψη αβεβαιότητας όπως στον πραγματικό χώρο. Εάν υπάρχει εσφαλμένη τομή στον ανακατασκευασμένο χώρο, δεν θα είμαστε σε θέση να διακρίνουμε κοιτάζοντας έναν τοπικό γείτονα πού οδηγείται η εξέλιξη και η πρόβλεψη δεν θα είναι ακριβής. Η ιδέα συνίσταται στη λήψη

σημείων $X(n)$ στη διάσταση d και στο σχηματισμό των μοναδιαίων διανυσμάτων κατεύθυνσης

$$\frac{X(n+1) - X(n)}{|X(n+1) - X(n)|}$$

σε κάθε θέση του ελκυστή. Στη συνέχεια ορίζουμε μια γειτονιά ενός δεδομένου μεγέθους που σχετίζεται με κάθε σημείο $X(n)$ στον ελκυστή και προσδιορίζουμε εάν όλα τα μοναδιαία διανύσματα κατεύθυνσης σε αυτή τη γειτονιά δείχνουν στην ίδια κατεύθυνση. Ακριβέστερα, οι Kaplan και Glass ελέγχουν εάν η κατανομή των διευθύνσεων σε μια γειτονιά είναι σύμφωνη με την τυχαιότητα ή εάν προκύπτει από κάποιο μη στατικό, ντετερμινιστικό κανόνα. Με αυτόν τον τρόπο προσδιορίζεται σε ποια διάσταση τα ανυσματικά πεδία είναι όλα πραγματικά. Στον αλγόριθμο αυτό μπορεί να εμφανιστούν αριθμητικά σφάλματα εξαιτίας του γεγονότος ότι για το σχηματισμό των κατευθυντικών ανυσμάτων λαμβάνονται υπόψη οι διαφορές μεταξύ αριθμών, καθένας από τους οποίους σε πολλές πραγματικές συνθήκες μπορεί να μη είναι γνωστός με μεγάλη ακρίβεια. Όπως πάντα, όταν λαμβάνεται η διαφορά μεταξύ γνωστών (αλλά όχι με ακρίβεια) αριθμών, μπορεί να γίνουν εντονότερα τα σφάλματα στρογγυλοποίησης των δεδομένων και να παραχθούν ανεπιθύμητες παραμορφώσεις.

Κεφάλαιο 5

Αναλλοίωτα Μεγέθη της Κίνησης

5.1 Γενικά

Η ταξινόμηση των δυναμικών συστημάτων αποτελεί ένα κρίσιμο μέρος της ανάλυσης των μετρούμενων σημάτων. Εφόσον η χαοτική κίνηση παράγει συνεχές, ευρύ φάσμα Fourier, πρέπει να αντικαταστήσουμε τα μεγέθη του στενού εύρους φάσματος Fourier που χρησιμοποιούμε στα γραμμικά συστήματα με άλλα χαρακτηριστικά του συστήματος. Τα δύο κυριότερα χαρακτηριστικά τα οποία αναδεικνύονται ως ταξινομητές είναι οι φράκταλ διαστάσεις και οι εκθέτες Lyapunov. Οι φράκταλ διαστάσεις είναι χαρακτηριστικές της γεωμετρικής εικόνας του ελκυστή και σχετίζονται με τον τρόπο που τα σημεία του ελκυστή κατανέμονται στο d_E -διάστατο χώρο. Οι εκθέτες Lyapunov μας πληροφορούν πώς οι τροχιές του ελκυστή αποκλίνουν ή συγκλίνουν κατά την εξέλιξη της δυναμικής. Και τα δύο μεγέθη είναι αναλλοίωτα ως προς τον τελεστή εξέλιξης του συστήματος και άρα ανεξάρτητα των αλλαγών στις αρχικές συνθήκες της τροχιάς και επίσης και τα δύο είναι ανεξάρτητα του συστήματος συντεταγμένων στο οποίο ο ελκυστής παρατηρείται. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να τα εκτιμήσουμε αξιόπιστα στον ανακατασκευασμένο φασικό χώρο χρησιμοποιώντας τα πειραματικά δεδομένα. Σημειώνεται ότι ο όρος αναλλοίωτα χρησιμοποιείται με την έννοια της έλλειψης ευαισθησίας ως προς τις αρχικές συνθήκες σε άμεση αντίθεση με τις συγκεκριμένες τροχιές του συστήματος που παρατηρούνται ή υπολογίζονται.

Καθένα από τα μεγέθη αυτά συνδέεται με ένα εργοδικό θεώρημα [29], το οποίο επιτρέπει τη θεώρησή τους ως στατιστικών ποσοτήτων που είναι χαρακτηριστικές ενός ντετερμινιστικού συστήματος. Εάν αυτό φαίνεται αντιφατικό είναι μόνο εννοιολογικό. Εφόσον έχουμε μια κατανομή σημείων στο \mathcal{R}^d , όπως στην περίπτωση των παράξενων ελκυστών, χρησιμοποιώντας τη φυσική κατανομή των σημείων αυτών στο d -διάστατο χώρο:

$$\rho(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta^d(x - X(k)) \quad (5.1)$$

όπου $\delta^d(x)$ η συνάρτηση Dirac με όρισμα το d -διάστατο διάνυσμα x , μπορούμε να ορίσουμε στατιστικές ποσότητες με τη $\rho(x)$ να αποτελεί την πυκνότητα πιθανότητας ή καλύτερα τη συχνότητα εμφάνισης. Η $\rho(x)$ ονομάζεται φυσική κατανομή ή φυσικό μέγεθος αφού η σχέση της με το πλήθος των σημείων σε έναν όγκο είναι απλή. Συγκεκριμένα το κλάσμα των σημείων εντός ενός όγκου V του φασικού χώρου είναι:

$$\int_V \rho(x) d^d x$$

Χρησιμοποιώντας την πυκνότητα αυτή, εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι οποιαδήποτε συνάρτηση $f(x)$ στο φασικό χώρο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον ορισμό ενός αναλλοίωτου μεγέθους κατά

την εξέλιξη $X(k) \rightarrow F(X(k)) = X(k+1)$. Πραγματικά, ολοκληρώνοντας τη συνάρτηση με τη $\rho(x)$ έχουμε:

$$\bar{f} = \int \rho(x) f(x) d^d x = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(X(k)) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(F^{k-1}(X(1))),$$

όπου η $F^k(x) = F(F^{k-1}(x))$ αποτελεί την k -οστή αναδρομή του δυναμικού κανόνα $x \rightarrow F(x)$, $F^0(x) = x$. Το πλήθος των σημείων θεωρείται αρκετά μεγάλο ώστε να ισχύει το θεωρητικό όριο $N \rightarrow \infty$ που φαίνεται στην εξίσωση (5.1), όταν έχουμε πραγματικά δεδομένα. Εύκολα βλέπει κανείς ότι, εάν υπολογίσουμε τη μέση τιμή της $f(F(x))$, δηλαδή της συνάρτησης που υπολογίζεται στο σημείο στο οποίο το x εξελίσσεται με βάση τον κανόνα $x \rightarrow F(x)$, βρίσκουμε

$$\int \rho(x) f(F(x)) d^d x = \bar{f} + \frac{1}{N} [f(X(N+1)) - f(X(1))]$$

το οποίο, στην περίπτωση μεγάλου N ισούται απλά με \bar{f} .

5.2 Διαστάσεις φράκταλ

Ισως η πιο ενδιαφέρουσα συνάρτηση $f(x)$ είναι αυτή που περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται το πλήθος των σημείων εντός σφαίρας ακτίνας r καθώς η ακτίνα αυτή τείνει στο μηδέν. Η γεωμετρική συσχέτισή της προκύπτει από το γεγονός ότι ο όγκος που καταλαμβάνει μια σφαίρα ακτίνας r στη διάσταση d συμπεριφέρεται ως r^d . Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο σημείων σε κάποιο Ευκλείδειο χώρο, δηλαδή το χώρο εμβάπτισης που κατασκευάζεται από τα δεδομένα $x(n), n = 1, 2, \dots, N$. Επιλέγουμε σημείο x πάνω ή πλησίον του ελκυστή και εξετάζουμε πώς μεταβάλλεται εντός απόστασης r από το x το πλήθος των σημείων πάνω στην τροχιά καθώς μικραίνουμε το r . Βέβαια, η ακτίνα r δεν μπορεί να γίνει πολύ μικρή αφού διαθέτουμε μόνο πεπερασμένο πλήθος δεδομένων. Εάν η ακτίνα γίνει πολύ μικρή, κανένα σημείο δεν θα βρίσκεται εντός της σφαίρας. Δηλαδή, η ακτίνα r πρέπει να είναι αρκετά μικρή ώστε να υπάρχουν αρκετά σημεία εντός της σφαίρας και όχι τόσο μεγάλη ώστε όλα τα δεδομένα να είναι εντός της σφαίρας (όταν $r = R_A$). Στην ενδιάμεση περιοχή τιμών της απόστασης r από το x , ο αριθμός των σημείων μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση

$$m(x, r) \approx r^{d(x)}$$

για μικρά r . Λέγοντας μικρά r εννοούμε $0 \ll \frac{r}{R_A} \ll 1$.

Εάν ο ελκυστής ήταν ένα κανονικό γεωμετρικό σχήμα διάστασης D , τότε σε καθεμιά τέτοια σφαίρα ακτίνας r γύρω από το x θα βρίσκαμε περίπου r^D σημεία. Αυτό θα μας οδηγούσε στο συμπέρασμα ότι $d(x) = D$ για όλα τα x . Σε έναν χαοτικό ή παράξενο ελκυστή, που είναι ένα γεωμετρικό σχήμα όχι τόσο κανονικό όσο μια σφαίρα, δεν αναμένουμε την ίδια τιμή του D παντού, αλλά το $d(x)$ να μεταβάλλεται με το x , κάτι που επίσης συνεπάγεται ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Για να βρούμε κάποιο αναλλοίωτο μέγεθος χρησιμοποιούμε το πλήθος των παρατηρούμενων σημείων $X(k)$ εντός σφαίρας γύρω από μια θέση x στο φασικό χώρο. Αυτό υπολογίζεται από τη σχέση

$$m(x, r) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N H(r - |X(k) - x|), \quad (5.2)$$

όπου $H(u)$ είναι η συνάρτηση Heaviside:

$$H(u) = \begin{cases} 1, & u > 0 \\ 0, & u \leq 0 \end{cases}$$

Η εξ. (5.2) μετρά όλα τα σημεία της τροχιάς $X(k)$ εντός ακτίνας r από το σημείο x και κανονικοποιεί τον αριθμό αυτό με το συνολικό πλήθος των σημείων. Η πυκνότητα $\rho(x)$ των σημείων του ελκυστή δεν είναι απαραίτητα ομοιόμορφη. Έτσι, ο υπολογισμός των ροπών της συνάρτησης $m(x, r)$ μπορεί να είναι αρκετά αποκαλυπτική. Επιλέγουμε ως συνάρτηση $f(x) = (m(x, r))^{q-1}$ και προσδιορίζουμε τη συνάρτηση $C(q, r)$ ως τη μέση τιμή της $f(x)$ στον ελκυστή σταθμισμένη με τη φυσική πυκνότητα $\rho(x)$:

$$C(q, r) = \int \rho(x) (m(x, r))^{q-1} d^d x = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \left[\frac{1}{k} \sum_{n=1}^k H(r - |X(n) - X(k)|) \right]^{q-1} \quad (5.3)$$

Η συνάρτηση $C(q, r)$ συνήθως καλείται ως συνάρτηση ή ολοκλήρωμα συσχετισμού του ελκυστή. Η ιδέα της εξέτασης της ποσότητας αυτής για το χαρακτηρισμό παράξενων ελκυστών οφείλεται στους Grassberger και Procaccia [50], οι οποίοι αρχικά μελέτησαν την περίπτωση $q = 2$. Η συνάρτηση αυτή των δύο μεταβλητών αποτελεί αναλλοίωτο μέγεθος για τον ελκυστή. Ωστόσο, στην πράξη εξετάζουμε μόνο τη μεταβολή της ποσότητας αυτής για μικρές τιμές της ακτίνας r . Στο όριο αυτό υποθέτουμε ότι:

$$C(q, r) \approx r^{(q-1)D_q}$$

και ορίζουμε τη φράκταλ διάσταση D_q , όταν υπάρχει. Η διάσταση D_q ορίζεται ως εξής:

$$D_q = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C(q, r)}{(q-1) \log r} \quad (5.4)$$

Από τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι η συνολική κανονικοποίηση του $C(q, r)$ δεν επηρεάζει τον υπολογισμό του D_q . Επίσης προκύπτει ότι $D_{q-1} \geq D_q$. Επίσης εξαιτίας του ορισμού της ως ορίου, η D_q είναι αναλλοίωτη ως προς τις αλλαγές του συστήματος συντεταγμένων. Ωστόσο, εάν κανείς εργάζεται σε ένα δεδομένο σύστημα συντεταγμένων που ορίζεται από τα διανύσματα καθυστέρησης $X(n)$ σε μια σταθερή διάσταση εμφάπτισης d_E , τότε ολόκληρη η καμπύλη $C(q, r)$ αποκτά ενδιαφέρον. Βέβαια, στην πράξη χρειαζόμαστε τον υπολογισμό του $C(q, r)$ για ένα εύρος μικρών τιμών του r για το οποίο μπορούμε να υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $\log C(q, r)$ είναι γραμμική ως προς το $\log r$ και να υπολογίσουμε την κλίση της για την περιοχή αυτή του r . Αυτό δεν είναι τόσο εύκολο. Πολλές μελέτες έχουν πραγματοποιηθεί σχετικά με το πώς αυτό υλοποιείται όταν είναι διαθέσιμο ένα πεπερασμένο πλήθος ενθόρυβων δεδομένων. Βασικά, όλες οι μελέτες έχουν επικεντρωθεί στη μελέτη της ποσότητας D_2 που καλείται διάσταση συσχετισμού επειδή ο αριθμητικός υπολογισμός της είναι μάλλον απλός και αξιόπιστος. Επίσης, ενδιαφέρον παρουσιάζει η διάσταση καταμέτρησης κύβων D_0 .

5.2.1 Διάσταση καταμέτρησης κύβων: D_0

Η διάσταση D_0 ονομάζεται διάσταση καταμέτρησης κύβων εξαιτίας του ορισμού της. Η εκτίμηση της D_0 πραγματοποιείται με τον υπολογισμό του πλήθους των σφαιρών ακτίνας r , και πιο συγκεκριμένα του πλήθους των κύβων που είναι απαραίτητοι για την κάλυψη όλων των σημείων του συνόλου των δεδομένων. Εάν υπολογίσουμε το πλήθος αυτό, $N(r)$, ως συνάρτηση του r καθώς αυτό μικραίνει, τότε ο λόγος

$$D_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log \frac{1}{r}}$$

ορίζει την D_0 και ποσοτικοποιεί την έννοια ότι για αρκετά μικρά r ισχύει $N(r) \approx r^{-D_0}$. Η διάσταση αυτή συμπίπτει με την τοπολογική διάσταση για απλά γεωμετρικά αντικείμενα, όπως τα σημεία, οι γραμμές ή τα επίπεδα αλλά μπορεί να είναι διαφορετική για περισσότερα πολύπλοκα αντικείμενα. Η τιμή του D_0 μπορεί να είναι ακέραιος αριθμός (π.χ. $D_0 = 1$ για ευθύγραμμο τμήμα, $D_0 = 2$ για επιφάνεια κλπ) ή μη ακέραιος αριθμός, κλασματικός ή άρρητος (π.χ. $D_0 \simeq 0.6309297$ για το 'μέσο τρίτο' σύνολο Cantor).

5.2.2 Διάσταση πληροφορίας : D_1

Ο ορισμός της διάστασης καταμέτρησης κύβων D_0 λαμβάνει υπόψη μόνο τη γεωμετρική δομή του ελκυστή και όχι την κατανομή των σημείων στον ελκυστή. Όλοι οι κύβοι έχουν την ίδια βαρύτητα παρόλο που το πλήθος των σημείων που καθέναν περιλαμβάνει είναι πολύ διαφορετικό. Το τελευταίο λαμβάνεται υπόψη από τη διάσταση πληροφορίας που υπολογίζεται από την ελάχιστη απαραίτητη πληροφορία που απαιτείται για τον προσδιορισμό ενός σημείου σε ένα σύνολο, όπως ένας υπερκύβος, με ακρίβεια l . Η πληροφορία αυτή μετριέται ως

$$s(l) = - \sum_{i=1}^{N(l)} p_i \log p_i$$

όπου $p_i = \mu_i/N$ είναι η πιθανότητα ενός σημείου να ανήκει στο i -οστό σύνολο και μ_i το πλήθος των σημείων στο i -οστό σύνολο, με το συνολικό πλήθος σημείων $N \rightarrow \infty$. Η διάσταση πληροφορίας D_1 δίνεται από τη σχέση:

$$D_1 = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{-s(l)}{\log l}$$

5.2.3 Διάσταση συσχετισμού : D_2

Η πιο δημοφιλής από τις διαστάσεις είναι η διάσταση συσχετισμού λόγω της ευκολότερης διαδικασίας υπολογισμού της. Η διάσταση συσχετισμού μπορεί να θεωρηθεί ως απλούστευση της διάστασης πληροφορίας:

$$D_2 = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\langle \mu_l \rangle_x}{\log l}$$

όπου τα μ_l ορίζονται, όπως και πριν για σφαίρα με κέντρο $X(k)$ αντί για υπερκύβο και το $\langle \cdot \rangle_x$ συμβολίζει τη μέση τιμή για όλα τα σημεία $X(k)$. Σημειώνεται ότι ισχύει $D_2 \leq D_1 \leq D$ με την ισότητα να εμφανίζεται όταν τα σημεία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στον ελκυστή.

Ο υπολογισμός της διάστασης συσχετισμού γίνεται με τη μέθοδο των Grassberger - Procaccia [50] (GP-αλγόριθμος). Πρώτα υπολογίζουμε το $\langle \mu_l \rangle_x$ χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα συσχετισμού:

$$C_M(r) = \frac{2}{N'(N'-1)} \sum_{i=1}^{N'} \sum_{j=i+1}^{N'} H(r - g(X(i), X(j)))$$

όπου $H(r)$ είναι η συνάρτηση Heaviside, $N' = N - (M-1)\tau$ το πλήθος των σημείων του ανακατασκευασμένου χώρου και M η διάσταση εμβάπτισης. Η συνάρτηση $g(\cdot)$ που εμφανίζεται στον παραπάνω τύπο, εφαρμοζόμενη στα σημεία $X(i)$ και $X(j)$, εκφράζει τη μεταξύ τους απόσταση, η οποία δεν είναι υποχρεωτικά η ευκλείδεια. Συνήθως, προς χάριν ευκολίας, χρησιμοποιείται η αντίστοιχη της sup-νόρμας μετρική, η οποία για m -διάστατα διανύσματα x και y γράφεται:

$$g(x, y) = \|x - y\|_\infty = \max\{|x(k) - y(k)|, 1 \leq k \leq M\}$$

Ο αριθμός $C_M(r)$ εκφράζει το πλήθος των αποστάσεων (μεταξύ σημείων του χώρου των φάσεων) που είναι μικρότερες ή ίσες του r .

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η συμπεριφορά του $C_M(r)$ καθώς το r τείνει στο μηδέν. Εάν η δυναμική του συστήματος περιγράφεται από έναν χαμηλής διάστασης ελκυστή, τότε το ολοκλήρωμα συσχετισμού παρουσιάζει συμπεριφορά δύναμης: $C_M(r) \propto r^{V(M)}$. Πριν από την εμφάνιση χορεσμού, οι υπολογιζόμενες τιμές για το $V(M)$ εξαρτώνται από τη διάσταση εμβάπτισης M . Ωστόσο, για συστήματα που παρουσιάζουν ελκυστή με πεπεραμένη και πιθανώς μικρή διάσταση, καθώς η διάσταση εμβάπτισης αυξάνει, η τιμή του $V(M)$ προσεγγίζει ένα πεπερασμένο όριο που

είναι η τιμή D_2 της διάστασης συσχετισμού, η οποία παρέχει μια εκτίμηση της φράκταλ διάστασης του ελκυστή. Εάν το σύστημα είναι ντετερμινιστικό, η κλίση του $\log C(r)$ ως προς το $\log r$ σε $\log - \log$ διάγραμμα συγκλίνει στο D_2 καθώς η διάσταση εμβάπτισης αυξάνει. Η λογική πίσω από αυτή τη προσέγγιση προκύπτει από το ξεδίπλωμα του ελκυστή. Όταν η διάσταση του χώρου εμβάπτισης είναι πολύ μικρή, τα δεδομένα θα γεμίζουν ολόκληρο το χώρο και η κλίση του γραφήματος ισούται με τη διάσταση εμβάπτισης. Καθώς η διάσταση εμβάπτισης προσεγγίζει το όριο του θεωρήματος Takens, τότε αναμένει κανείς να προσεγγίζει την τιμή της διάστασης συσχετισμού και οι υπολογισμοί του να συγκλίνουν σε αυτή. Τα σταθερά σημεία και οι οριακοί κύκλοι χαρακτηρίζονται από διάσταση μηδέν και ένα, αντίστοιχα, ενώ η σχεδόν περιοδική κίνηση παρουσιάζει διάσταση ίση με τον αριθμό των ανεξάρτητων συχνοτήτων. Οι παράξενοι ελκυστές που σχετίζονται με τη χαοτική κίνηση συνήθως χαρακτηρίζονται από μη ακέραια διάσταση.

Η τιμή του D_2 παρέχει σημαντικές πληροφορίες για τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας του συστήματος. Συγκεκριμένα, η δυναμική του φασικού χώρου που χαρακτηρίζεται από μια μικρή τιμή της διάστασης συσχετισμού μπορεί να περιγράφεται από ένα σύστημα λίγων (συνήθως το πολύ $2D_2 + 1$) συζευγμένων κανονικών διαφορικών εξισώσεων. Σημειώνεται ωστόσο ότι από μια αξιόπιστη ανίχνευση μιας πεπερασμένης και μικρής τιμής του D_2 μπορεί να συμπεράνει κανείς μόνο ότι είναι δυνατή μια περιγραφή ως προς ένα χαμηλοδιάστατο ντετερμινιστικό μοντέλο. Αντίστροφα, ο λευκός θόρυβος σχετίζεται με την απόκλιση της διάστασης συσχετισμού. Επομένως, εάν κατά την ανάλυση μιας μετρούμενης χρονοσειράς δεν παρατηρείται καμία σύγκλιση στο $V(M)$ καθώς αυξάνει το M , θεωρείται γενικά ότι το πλήθος των βαθμών ελευθερίας του συστήματος είναι μεγάλο. Στην περίπτωση αυτή, ένα στοχαστικό μοντέλο μπορεί να είναι περισσότερο κατάλληλο.

Η υπολογιστική πολυπλοκότητα είναι $O(N^2)$ για τον αλγόριθμο των Grassberger-Procaccia. Στη βιβλιογραφία συναντά κανείς αρκετές εργασίες για τη βελτίωση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας. Για παράδειγμα δεν είναι απαραίτητος ο υπολογισμός αποστάσεων μεγαλύτερων από κάποια απόσταση r . Ως αποτέλεσμα έχει προταθεί η οργάνωση των δεδομένων σε υπερκύβους [125]. Άλλοι αλγόριθμοι επιτρέπουν ταυτόχρονα υπολογισμό του $C(r)$ για ένα εύρος διαστάσεων εμβάπτισης. Με τον τρόπο αυτό η υπολογιστική πολυπλοκότητα γίνεται $N \log N$.

5.2.4 Διόρθωση Theiler

Ο Theiler [126] έδειξε ότι για αυτοσυσχετισμένα δεδομένα, το εύρος της σταθερής κλίσης στο $\log - \log$ διάγραμμα μπορεί να περιοριστεί εάν το πλήθος των δεδομένων N είναι μικρό. Ο περιορισμός μπορεί να περιοριστεί χωρίς την αύξηση του N με τη χρήση μιας ελαφρώς γενικευμένης εκδοχής του ολοκληρώματος συσχετισμού:

$$C_M(r, W) = \frac{2}{N'(N' - 1)} \sum_{i=W}^{N'} \sum_{j=i+1}^{N'} H(r - g(X(i), X(j)))$$

όπου η παράμετρος W αποτελεί τη διόρθωση Theiler. Για $W = 1$ παίρνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος συσχετισμού. Εάν $W > \tau(2/N)^{2/M}$ τότε θα υπάρχουν αρκούντως πολλά σημεία ώστε να μην περιοριστεί το εύρος της γραμμικής περιοχής στο $\log - \log$ διάγραμμα. Σημειώνεται ότι το $W \ll N$ και έτσι η προτεινόμενη τροποποίηση είναι στην πραγματικότητα μικρή. Η διόρθωση Theiler συνιστάται ακόμη και όταν έχουμε μεγάλες τιμές του N . Διαισθητικά, εάν είναι $W > \tau$ εξασφαλίζουμε ότι η συμπεριφορά των μικρών r καταμετράται μόνο επειδή προέκυψε από ζεύγη διανυσμάτων που βρέθηκαν 'τυχαία' κοντά. Δεν περιλαμβάνονται εκείνα τα ζεύγη των διανυσμάτων που είναι κοντά στο χώρο επειδή είναι κοντά στο χρόνο.

5.3 Υπολογισμός της διάστασης συσχετισμού

5.3.1 Αλγόριθμοι υπολογισμού της συνάρτησης συσχετισμού

Ο υπολογισμός της διάστασης συσχετισμού ξεκινά με τον υπολογισμό του ολοκληρώματος συσχετισμού $C_M(r)$. Το $C_M(r)$ πρέπει να υπολογισθεί για μικρά r , μια και το όριο που εμφανίζεται στον τύπο εκτίμησης της D_2 προκύπτει για $r \rightarrow 0$. Επειδή όμως έχουμε στη διάθεσή μας πεπερασμένο πλήθος σημείων, για υπερβολικά μικρές ακτίνες το πλήθος των αποστάσεων που θα είναι μικρότερες από αυτές τις ακτίνες θα είναι προφανώς μηδέν (υποπληθυσμός). Έτσι, θεωρούμε καταρχήν για μικρή ακτίνα r_b ως το κάτω όριο των ακτίνων για τις οποίες θα υπολογίσουμε το $C_M(r)$. Λογικό είναι να θέσουμε και ένα άνω όριο r_e για αυτές τις ακτίνες, αφού, λόγω του πεπερασμένου των δοθέντων σημείων, θα υπάρχει μέγιστη απόσταση μεταξύ τους. Επίσης, από τη στιγμή που είμαστε υποχρεωμένοι να υπολογίσουμε πειραματικά (μετρώντας αποστάσεις) τη συνάρτηση $C_M(r)$ στο διάστημα $[r_b, r_e]$, είναι αδύνατο να πούμε ότι θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση αυτή για άπειρο πλήθος τιμών της μεταβλητής r από το διάστημα $[r_b, r_e]$, άρα θα πρέπει να υπολογιστεί για πεπερασμένο πλήθος τιμών της r .

Οι διάφοροι αλγόριθμοι υπολογισμού της διάστασης συσχετισμού διαφέρουν ως προς το πλήθος των αποστάσεων που υπολογίζουν. Σύμφωνα με τον G-P αλγόριθμο, οι υπολογισμοί πραγματοποιούνται για όλα τα διαφορετικά ζεύγη σημείων. Έτσι, για N δοσμένα σημεία του χώρου των φάσεων, ο αλγόριθμος αυτός υπολογίζει $N \frac{N-1}{2}$ αποστάσεις. Άρα έχει πολυπλοκότητα $O(N^2)$.

Ο Theiler [125] στοχεύοντας στη μείωση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας του G-P αλγορίθμου, παρατήρησε ότι το γραμμικό τμήμα της καμπύλης του $C_M(r)$ σε λογαριθμική κλίμακα εκτείνεται σε ένα μεγάλο μέρος της κεντρικής περιοχής της, πράγμα που σημαίνει πως για την εκτίμηση της κλίσης του γραμμικού αυτού τμήματος, αρκεί η καμπύλη να εκτείνεται μέχρι μια ακτίνα r_0 που να είναι αρκετά μικρότερη από την τελική ακτίνα r_e . Έτσι, δε θα είναι πια απαραίτητο να υπολογιστούν οι αποστάσεις μεταξύ σημείων που απέχουν περισσότερο από r_0 . Αυτή η ιδέα μπορεί να υλοποιηθεί χρησιμοποιώντας ένα πλέγμα υπερκύβων ακμής r_0 που καλύπτει εκείνο το τμήμα του χώρου των φάσεων, που περιέχει τα N δοσμένα σημεία. Τότε κάθε τέτοιος υπερκύβος θα περιέχει κάποιο πεπερασμένο (ίσως και μηδενικό) πλήθος σημείων. Για κάθε τέτοιο σημείο οποιουδήποτε υπερκύβου θα υπολογίζουμε την απόστασή του από όλα τα σημεία μόνο των γειτονικών του υπερκύβων και όχι όλων των υπερκύβων της κάλυψης. Έτσι, το πλήθος των αποστάσεων που θα υπολογισθούν θα είναι κατά πολύ μικρότερο από εκείνο του G-P αλγορίθμου. Βέβαια, ο χρόνος υπολογισμού επιβαρύνεται με το χρόνο αναζήτησης των γειτονικών υπερκύβων. Όμως, όπως απέδειξε ο Theiler, ο επιπρόσθετος αυτός χρόνος δε θα υπερσχύσει του χρόνου υπολογισμού των αποστάσεων, αν ισχύει $b \leq 0.5 \log_2 M$, όπου b είναι η διάσταση των υπερκύβων που χρησιμοποιούνται. Η διάσταση αυτή b δεν μπορεί προφανώς να είναι μεγαλύτερη από τη διάσταση M του χώρου των φάσεων, στον οποίο εργαζόμαστε. Έτσι, πρέπει να ισχύει $b \leq \min\{M, 0.5 \log_2 N\}$. Από την άλλη πλευρά, όσο μεγαλύτερο είναι το b , τόσο λιγότερο 'όγκο' θα καταλαμβάνουν οι υπερκύβοι και συνεπώς τόσο μικρότερο θα είναι το πλήθος των σημείων που θα περιέχουν οι υπερκύβοι αυτοί και έτσι τόσο λιγότερος θα είναι ο χρόνος που απαιτείται για τον υπολογισμό των αποστάσεων. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να επιδιωχθεί το b να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερο. Έτσι προκύπτει ότι η βέλτιστη τιμή για το b είναι $b = \lceil \min\{M, 0.5 \log_2 N\} \rceil$. Αν $b = M$, τότε ο αλγόριθμος αυτός ονομάζεται box-assisted αλγόριθμος του Theiler. Αν $b < M$, τότε ο αλγόριθμος ονομάζεται prism-assisted αλγόριθμος του Theiler. Η πολυπλοκότητά του για τη βέλτιστη τιμή του b αποδεικνύεται ότι είναι $O(N \log N)$.

Τέλος, ο Grassberger [48] πρότεινε τη βελτίωση του αλγορίθμου του Theiler στο θέμα της υλοποίησης της τοποθέτησης των σημείων στους υπερκύβους που ανήκουν. Συγκεκριμένα, ο Grassberger πρότεινε κάθε στοιχείο του πολυδιάστατου πίνακα που παριστάνει το πλέγμα υπερκύβων, να περιέχει κάποιο δείκτη της κεφαλής μιας απλά συνδεδεμένης λίστας, η οποία θα έχει

ως στοιχεία τα σημεία που βρίσκονται σε εκείνον τον υπερκύβο, τον οποίο παριστάνει το στοιχείο αυτό του πίνακα. Χρησιμοποιώντας αυτές τις δομές, κάθε φορά που έχουμε κάποιο σημείο και θέλουμε να το τοποθετήσουμε στη λίστα εκείνου του στοιχείου του πίνακα, το οποίο αντιστοιχεί στον υπερκύβο του σημείου, δεν έχουμε παρά να ξεκινήσουμε από την κεφαλή αυτής της λίστας, να την ακολουθήσουμε μέχρι το τέλος της και να τοποθετήσουμε εκεί το νέο σημείο. Ο Grassberger απέδειξε ότι η πολυπλοκότητα αυτού του αλγορίθμου είναι και πάλι της τάξης $O(N \log N)$, αλλά με μια βελτίωση του χρόνου κατά έναν παράγοντα 2 έως 4 σε σχέση με τον αλγόριθμο του Theiler.

5.3.2 Εκτιμητές της διάστασης συσχετισμού

Στην πράξη, η D_2 υπολογίζεται συνήθως ως η κλίση σε ένα $\log - \log$ διάγραμμα του $C_M(r)$ (ο δείκτης M παραλείπεται στη συνέχεια για λόγους απλότητας) ως προς το r , ενός τμήματος περιορισμένο σε κάποιο εύρος του r στο οποίο παρατηρείται γραμμικότητα. Ωστόσο η επιλογή της περιοχής και ο προσδιορισμός της κλίσης της δεν είναι εύκολη υπόθεση.

Στην περίπτωση δεδομένων από προσομοιώσεις γνωστών εξισώσεων η γραμμική περιοχή για τον υπολογισμό της διάστασης συσχετισμού εκτείνεται σε ένα σημαντικό διάστημα του $\log r$. Ωστόσο αποκλίσεις συμβαίνουν για τις ανώτερες και τις κατώτερες τιμές του r . Για τις ανώτερες τιμές, όλα τα γραφήματα συγκλίνουν στο 0 καθώς το r τείνει στη διάμετρο του ελκυστή. Για τις κατώτερες περιοχές η γραμμική περιοχή καταστρέφεται καθώς το r πλησιάζει την ελάχιστη απόσταση μεταξύ σημείων στο χώρο εμβάπτισης. Συνεπώς, τρεις ξεχωριστές περιοχές μπορούν να προσδιοριστούν στο διάγραμμα.

Στην περίπτωση των πραγματικών παρατηρήσεων, περιμένει να παρατηρήσει κανείς τη γραμμική περιοχή για ένα ενδιαμέσο διάστημα τιμών του $\log r$ με εύλογο μήκος. Ωστόσο, λόγω της ποιότητας και του μεγέθους των δεδομένων καθώς και της πολυπλοκότητας του υποκείμενου χαοτικού συστήματος, η γραμμική περιοχή έχει συχνά μικρό μήκος και μάλιστα μερικές φορές δεν είναι ευδιάκριτη. Στην περίπτωση ύπαρξης θορύβου μικρού πλάτους το ολοκλήρωμα συσχετισμού εμφανίζει μια τέταρτη περιοχή σε απόστασεις γύρω από το πλάτος του θορύβου.

Σε μερικές περιπτώσεις, ο ελκυστής μπορεί να έχει ιδιότητες που δυσκολεύουν τον υπολογισμό της διάστασης συσχετισμού. Η καλούμενη 'πτύχωση' (lacunarity) είναι μια τέτοια ιδιότητα και προκαλεί ταλαντώσεις στο γράφημα του $\log C(r)$. Μερικοί ελκυστές χαρακτηρίζονται από το οριακό φαινόμενο, δηλαδή τα γειτονικά σημεία στα όρια του ελκυστή ακολουθούν διαφορετική γραμμική κλίμακα από αυτή των σημείων στο εσωτερικό. Σε μερικές περιπτώσεις μπορεί να παρατηρηθούν δύο διαφορετικές κλίσεις. Το φαινόμενο αυτό καλείται γόνατο και υπάρχουν τουλάχιστον δύο εξηγήσεις για αυτό. Μπορεί να προκύπτει από δύο διαφορετικούς τύπους κίνησης. Μια σημαντική παρατήρηση αφορά τις στατιστικές απαιτήσεις για τον αξιόπιστο υπολογισμό της διάστασης συσχετισμού. Το θέμα αυτό έχει μελετηθεί από πολλούς ερευνητές με αντικρουόμενες εκτιμήσεις σχετικά με το ελάχιστο πλήθος σημείων που απαιτείται για τον αξιόπιστο υπολογισμό της D_2 . Από τους Nerenberg και Essex [88] έχει προταθεί ότι ο ελάχιστος αριθμός σημείων που απαιτείται είναι $N_{min} \approx 10^{D_2}$. Έτσι, όταν ανιχνεύεται συγκλίνουσα διάσταση συσχετισμού D_2 με λιγότερα από N_{min} σημεία, υπάρχει ο κίνδυνος η D_2 να οφείλεται στην έλλειψη στατιστικών παρά στη χαμηλής διάστασης δυναμική. Ωστόσο, ο αριθμός N_{min} είναι ακόμη υπό μελέτη. Οι εκτιμήσεις από μικρά N δεν μπορούν να απορριφθούν άμεσα, αν και η μέγιστη πιθανή τιμή του N είναι επιθυμητή. Συνοπτικά, οι υπολογισμοί διαστάσεων από τα πραγματικά δεδομένα πρέπει να γίνεται με προσοχή, ιδιαίτερα όταν τα δεδομένα είναι λίγα και ενθόρυβα.

Ο πιο συνηθισμένος τρόπος υπολογισμού είναι η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων. Αυτή είναι μια λογική προσέγγιση, ωστόσο συχνά γίνεται κακή χρήση της. Για τον υπολογισμό της D_2 έχουν προταθεί αρκετοί εκτιμητές, οι κυριότεροι των οποίων περιγράφονται στη συνέχεια.

Τί όμως μαθαίνει κανείς από τον υπολογισμό της διάστασης συσχετισμού D_2 ; Εφόσον με τη

μέθοδο των εσφαλμένων πλησιέστερων γειτόνων έχουμε συμπεράνει ότι μελετούμε ένα χαμηλής διάστασης σύστημα και μάλιστα από τη μέθοδο αυτή γνωρίζουμε την απαιτούμενη διάσταση για να ξεδιπλώσουμε τον ελκυστή, στη συνέχεια αναζητούμε ένα μοναδικό αριθμό για να χαρακτηρίσουμε τον ελκυστή. Εάν η D_2 δεν είναι ακέραιος αριθμός, αυτό αποτελεί σημαντική παρατήρηση σχετικά με τη δυναμική της πηγής του παρατηρούμενου σήματος, αλλά σίγουρα δεν τη χαρακτηρίζει πλήρως. Πραγματικά, κανείς δε γνωρίζει ποιο σύνολο αποτελεί το πλήρες σύνολο αναλλοίωτων που χαρακτηρίζει έναν ελκυστή.

Ο υπολογισμός της D_2 δεν πρέπει να θεωρείται ως ένας τρόπος για να προσδιορίσουμε εάν το σήμα προέρχεται από μια πηγή χαμηλής διάστασης ή εάν προέρχεται από μια ντετερμινιστική πηγή, αλλά ως ένας χαρακτηριστικός αριθμός της πηγής αυτής. Και είναι σημαντικό να αναριωτόμαστε απλά τι θα έχουμε μάθει για την πηγή του χαοτικού συστήματος από αυτόν τον αριθμό, ειδικά λαμβάνοντας υπόψη την αξιοσημείωτη αβεβαιότητα που υπεισέρχεται στον υπολογισμό της D_2 από τα πειραματικά δεδομένα.

Εκτιμητής Takens

Ο Takens [122] πρότεινε έναν εκτιμητή της διάστασης συσχετισμού D_2 χρησιμοποιώντας το σύνολο των αποστάσεων. Ο εκτιμητής του Takens απαιτεί την επιλογή μιας μόνο ελεύθερης παραμέτρου R_0 , που είναι η άνω απόσταση αποκοπής. Όλες οι αποστάσεις μεγαλύτερες από την R_0 αγνοούνται και για όλες τις αποστάσεις που είναι μικρότερες από την R_0 υπολογίζεται ο μέσος όρος σύμφωνα με τη σχέση:

$$\hat{D}_2 = \frac{C(R_0)}{\int_0^{R_0} [C(r)/r] dr} \quad (5.5)$$

Ο εκτιμητής του Takens είναι βέλτιστος στην περίπτωση που όλες οι αποστάσεις είναι ανεξάρτητες (το οποίο δεν είναι αυστηρά η πραγματικότητα, αλλά είναι συχνά μια καλή υπόθεση για μικρές αποστάσεις) και το ολοκλήρωμα συσχετισμού είναι αυστηρά ανάλογο του r^{D_2} .

Εκτιμητής χορδής

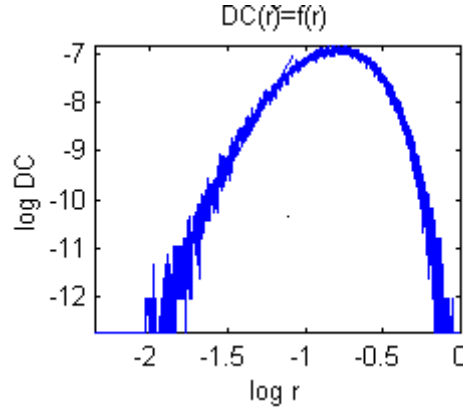
Ο ευκολότερος τρόπος εκτίμησης της κλίσης του ολοκληρώματος συσχετισμού είναι η επιλογή δύο σημείων στην καμπύλη, π.χ. R_0 και R_1 και η μέτρηση της κλίσης της χορδής που σχεδιάζεται μεταξύ των δύο αυτών σημείων. Δηλαδή,

$$\hat{D}_2 = \frac{\log C(R_0) - \log C(R_1)}{\log R_0 - \log R_1} \quad (5.6)$$

Αυτό μπορεί να φαίνεται μη αποδοτικό, επειδή δε χρησιμοποιείται σημαντική πληροφορία, αλλά για μια καλά επιλεγμένη χορδή, το στατιστικό σφάλμα είναι μόνο κατά 25% χειρότερο του βέλτιστου εκτιμητή Takens, ο οποίος χρησιμοποιεί ολόκληρη την πληροφορία του ολοκληρώματος συσχετισμού.

Η επιλογή της βέλτιστης χορδής πραγματοποιείται λαμβάνοντας υπόψη το συμφηρισμό μεταξύ δύο επιδράσεων. Πρώτον, το μήκος της χορδής πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερο, έτσι ώστε η κλίση να είναι λιγότερο ευαίσθητη στις μικρές διακυμάνσεις των τελικών άκρων. Δεύτερο, η χορδή δε θα πρέπει να είναι τόσο μεγάλη ώστε να εισέρχεται τόσο πολύ στις μικρές αποστάσεις, όπου οι διακυμάνσεις του τελικού άκρου είναι ιδιαίτερα μεγάλες. Η βέλτιστη επιλογή του R_0 είναι όσο το δυνατό μεγαλύτερο. Αυτό είναι αλήθεια από την άποψη της στατιστικής ακρίβειας, αλλά εάν συμπεριλαμβάνονται συστηματικά σφάλματα, είναι επιθυμητές μικρότερες τιμές του R_0 . Έχοντας επιλέξει το R_0 , η βέλτιστη επιλογή του R_1 δίνεται από τη σχέση [129]

$$\frac{C(R_0)}{C(R_1)} \approx 5$$



Σχήμα 5.1: Οι διαφορές της συνάρτησης συσχετισμού $DC(n)$ ως συνάρτηση του $r = n \cdot \Delta r$

Χρησιμοποιώντας αυτόν τον 'κανόνα του 5', είναι δυνατός ο γρήγορος υπολογισμός της διάστασης φράκταλ που είναι ελαφρώς λιγότερο αποδοτικός από τον βέλτιστο.

Εκτιμητής διαφοράς

Η συνάρτηση $C(r) \sim r^{D_2}$ είναι μια γνήσια αύξουσα συνάρτηση του r . Υποθέτοντας ότι η $C(r)$ είναι παραγωγίσιμη, έχουμε :

$$\frac{dC(r)}{dr} = r^{D_2-1} \quad (5.7)$$

Και η συνάρτηση αυτή είναι γνήσια αύξουσα εάν $D_2 > 1$. Γράφοντας την εξίσωση (5.7) χρησιμοποιώντας διαφορές παίρνουμε

$$\Delta C(r) = r^{D_2-1} \Delta r \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta C(r)}{\Delta r} = r^{D_2-1} \quad (5.8)$$

Η εξίσωση (5.8) μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε το άνω όριο R_0 της γραμμικής περιοχής σε $\log - \log$ διάγραμμα χρησιμοποιώντας τις διαδοχικές διαφορές του ολοκληρώματος συσχετισμού [76]. Συγκεκριμένα, για μικρά Δr προσδιορίζουμε τις διαφορές $DC(n) = (C(n \cdot \Delta r)) - C((n-1) \cdot \Delta r)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ και σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση των $DC(n)$ ως συνάρτηση του $r = n \cdot \Delta r$. Το Σχήμα 5.1 παρουσιάζει ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα. Στην πράξη, λόγω του πεπερασμένου πλήθους σημείων, για μεγάλα r η συνάρτηση (5.8) δεν είναι γνήσια αύξουσα και άρα για αυτά δεν ισχύει η υπόθεση $C(r) \sim r^{D_2}$ που χρησιμοποιούμε για τον προσδιορισμό της διάστασης συσχετισμού D_2 . Η υπόθεση αυτή ισχύει για τα $r \leq RD_0$, όπου η RD_0 αντιστοιχεί στο μέγιστο της γραμμικής παράστασης των $DC(n)$ ως συνάρτηση του $n \cdot \Delta r$. Η τιμή αυτή μπορεί να αποτελέσει το άνω όριο της γραμμικής περιοχής της καμπύλης του $\log C(r)$ ως συνάρτηση του $\log r$. Σημειώνεται τέλος ότι η D_2 μπορεί να υπολογιστεί και από την κλίση της γραμμικής παράστασης των $DC(n)$ ως συνάρτηση του $r = n \cdot \Delta r$ σε $\log - \log$ διάγραμμα, δεδομένου ότι η κλίση αυτή ισούται με $D_2 - 1$.

Μέγιστη αποδεκτή εκτίμηση της διάστασης συσχετισμού

Οι Eckmann και Ruelle [30] υπολόγισαν τη μέγιστη διάσταση που μπορεί να υπολογιστεί από τον αλγόριθμο των Grassberger-Procaccia. Ο αριθμός $\mathcal{N}(r)$ των ζευγαριών των σημείων με απόσταση μεγαλύτερη από r είναι:

$$\mathcal{N}(r) \approx \text{const} \times r^{D_2}$$

Εάν D η διάμετρος του ανακατασκευασμένου ελκυστή, ισχύει $\mathcal{N}(D) = \frac{1}{2}N^2$. Έτσι $\mathcal{N}(r) \simeq \frac{N^2}{2} \left(\frac{r}{D}\right)^{D_2}$. Ο προσδιορισμός της κλίσης του $\log \mathcal{N}(r)$ απαιτεί τη χρησιμοποίηση αρκετών τιμών του r και αυτές θα πρέπει να είναι μικρές ως προς τη διάμετρο. Παράλληλα, για λόγους στατιστικής πρέπει το $\mathcal{N}(r)$ να είναι μεγάλο ως προς το 1. Δηλαδή, έχουμε $\frac{1}{2}N^2 \left(\frac{r}{D}\right)^{D_2} \geq 1$ και $\frac{r}{D} = \rho \ll 1$. Λογαριθμίζοντας παίρνουμε $2 \log N > D_2 \log(1/\rho)$. Άρα, είναι φανερό πως ο αλγόριθμος Grassberger-Procaccia δε θα παράγει διαστάσεις μεγαλύτερες από:

$$D_{max} = \frac{2 \log N}{\log(1/\rho)} \quad (5.9)$$

5.4 Εκθέτες Lyapunov

Σε ένα ντετερμινιστικό δυναμικό σύστημα μπορούμε να υπολογίσουμε μια μελλοντική κατάσταση $X(t)$ γνωρίζοντας την κατάστασή του $X_0 = X(0)$ σε μια δεδομένη χρονική στιγμή, εάν επιλύσουμε αναλυτικά ή αριθμητικά τις εξισώσεις της κίνησης. Ωστόσο, οι αρχικές συνθήκες είναι συχνά γνωστές μόνο με πεπερασμένη ακρίβεια. Επομένως, μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε πώς θα εξελιχθεί στο χρόνο ένα αρχικό σφάλμα ή μια διαταραχή στις αρχικές συνθήκες.

Συστήματα στα οποία κυριαρχούν σταθερά σημεία ή οριακοί κύκλοι χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι το αρχικό σφάλμα αυξάνει γραμμικά με το χρόνο και επομένως η προβλεψιμότητα είναι βέβαιη για αρκετό χρόνο. Στην περίπτωση ενός ολικού ελκυστικού σημείου, το σύστημα θα τείνει πάντα προς το σημείο αυτό και το αρχικό σφάλμα θα μειώνεται με το χρόνο. Επίσης, σε έναν οριακό κύκλο υπάρχει σφάλμα φάσης που μπορεί να αυξάνει το πολύ γραμμικά με το χρόνο, οδηγώντας σε απώλεια γνώσης της ακριβούς φάσης της ταλάντωσης.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι θεωρούμε ένα σύστημα με δύο ευσταθή σημεία ισορροπίας και ένα ασταθές σημείο μεταξύ τους. Στην περιοχή του ασταθούς σημείου, μια μικρή διαταραχή στις αρχικές συνθήκες μπορεί να αναγκάσει το σύστημα να τείνει προς το ένα ή το άλλο σταθερό σημείο, οδηγώντας έτσι στην μη προβλεψιμότητα της τελικής κατάστασης του συστήματος για μικρές αρχικές διαταραχές. Αυτό συμβαίνει ωστόσο, μόνο για μια πολύ μικρή ειδική περιοχή του φασικού χώρου, την περιοχή του ασταθούς σημείου και παντού αλλού η εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες είναι πολύ λιγότερο ακραία.

Το κύριο χαρακτηριστικό του ασταθούς σημείου που οδηγεί το σύστημα σε αυτή τη συμπεριφορά είναι η διαίρεση του φασικού χώρου στις τροχιές του φασικού χώρου που ξεκινούν ή συγκλίνουν στο ασταθές σημείο. Αυτές οι ειδικές τροχιές είναι οι ασταθείς και οι ευσταθείς πολλαπλότητες του ασταθούς σημείου, τα σύνολα δηλαδή όλων των σημείων που είτε αποκλίνουν είτε συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας, αντίστοιχα. Αυτές οι συγκεκριμένες τροχιές οριοθετούν τις κατευθύνσεις της ροής στο φασικό χώρο κοντά στο εν λόγω σημείο. Το σημαντικότερο είναι ότι στις θέσεις που οι πολλαπλότητες αυτές τέμνονται, απαιτείται μόνο μια μικρή αλλαγή στις αρχικές συνθήκες για την παραγωγή μιας πολύ διαφορετικής εξέλιξης.

Συστήματα που εμφανίζουν ντετερμινιστική χαοτική δυναμική χαρακτηρίζονται επίσης από ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Στα συστήματα αυτά, ο ελκυστής περιέχει άπειρα ασταθή στοιχεία (οριακούς κύκλους). Καθένας από τους ασταθείς κύκλους περιλαμβάνει τεμνόμενες ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες που ξανά διαμερίζουν την κατεύθυνση της ροής στο φασικό χώρο. Συνεπώς, στην περιοχή κάθε κύκλου, υπάρχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Μάλιστα, στο χαοτικό σύστημα οι ασταθείς κύκλοι σχηματίζουν τον πυκνό σκελετό του παράξενου ελκυστή. Έτσι, υπάρχουν τεμνόμενες πολλαπλότητες πυκνά κατανομημένες στον ελκυστή και υπάρχει ευαίσθητη εξάρτηση από την αρχική κατάσταση σε όλον τον ελκυστή.

Επομένως στους παράξενους ελκυστές μικρές αρχικές διαταραχές μπορούν να ενισχυθούν με εκθετική ταχύτητα και να καταστρέψουν την προβλεψιμότητα του συστήματος μετά από πεπερασμένο χρόνο. Η συμπεριφορά αυτή μπορεί να αποτελέσει και ορισμό του ντετερμινιστικού χάους.

Ο ποσοτικός προσδιορισμός της ευαισθητής εξάρτησης από τις αρχικές συνθήκες στηρίζεται στην έννοια των εκθετών Lyapunov. Εάν θεωρήσουμε μια λύση X ενός m -διάστατου δυναμικού συστήματος (όπως το $\dot{X} = F(X)$), η εξέλιξη μιας απειροστά μικρής διαταραχής $\delta(t)$ μπορεί να θεωρηθεί σε πρώτη προσέγγιση γραμμική:

$$\dot{\delta} = \frac{\partial F}{\partial X} \delta \quad (5.10)$$

Η σχέση (5.10) είναι ένα σύστημα m γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που για μικρά t έχει λύση της μορφής:

$$\xi_i(t) = \xi_i(0) \cdot e^{\lambda_i \cdot t}, i = 1, \dots, m \quad (5.11)$$

όπου $\xi(0)$ τα ιδιοδιανύσματα και λ_i τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών του πίνακα $A = \frac{\partial F}{\partial x}$. Τα λ_i λέγονται εκθέτες Lyapunov του συστήματος και το σύνολό τους αποτελεί το φάσμα Lyapunov. Η λύση αυτή μας υποδεικνύει ότι αρχικά κοντινές καταστάσεις στο φασικό χώρο συγκλίνουν (αν $\lambda_i < 0$) ή αποκλίνουν (αν $\lambda_i > 0$) εκθετικά με το χρόνο για μικρά t . Καθεμιά από τις ιδιοτιμές του πίνακα $A = \frac{\partial F}{\partial X}$ παρέχει μια εκτίμηση του ρυθμού αύξησης μιας απειροστής αρχικής διαταραχής στη διεύθυνση του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος του πίνακα. Ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov ορίζεται ως:

$$\lambda_{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\delta(t)}{\delta_0} \quad (5.12)$$

και μετρά τον ταχύτερο ρυθμό αύξησης ενός απειροστού σφάλματος στις αρχικές συνθήκες.

Αφού γενικά μια αρχική διαταραχή έχει συνιστώσες κατά μήκος όλων των ιδιοανυσμάτων του πίνακα $A = \frac{\partial F}{\partial X}$, η ταχύτερη αύξηση θα κυριαρχήσει και το απειροστό σφάλμα θα αυξάνει περίπου ως $\delta(t) = \delta_0 e^{\lambda_{max} t}$, όπου $\delta_0 = \delta(t=0)$, οδηγώντας σε μια ταχύτατη απόκλιση των γειτονικών τροχιών.

Ένα δυναμικό σύστημα γενικά θεωρείται χαοτικό εάν $\lambda_{max} > 0$. Σημειώνεται ότι η παρουσία των δύο ορίων στον προηγούμενο ορισμό είναι πολύ σημαντική και δεν μπορεί ούτε να αμεληθεί ούτε να αντιστραφεί. Η διαταραχή πρέπει να είναι απειροστή ώστε να θεωρηθεί γραμμική και ο μέσος όρος σε ένα άπειρο χρονικό διάστημα είναι απαραίτητος καθώς ο εκθέτης Lyapunov είναι μέτρο του μέσου σφάλματος αύξησης σε ολόκληρη την τροχιά. Τυπικά, ο ρυθμός αύξησης μπορεί να είναι πολύ διαφορετικός και μπορεί να εξαρτάται από το συγκεκριμένο τμήμα του ελκυστή κατά τη διάρκεια της εξέλιξης. Για το λόγο αυτό, ακόμη και εάν ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov είναι χρήσιμος για τον προσδιορισμό του χαοτικού συστήματος, στην πράξη δεν δίνει πάντα μια καλή ένδειξη του κατά πόσο γρήγορα απειροστά σφάλματα αυξάνουν σε βραχείς χρόνους καθώς αυτό μπορεί να εξαρτάται από την αρχική θέση στον ελκυστή και την αρχική θέση του σφάλματος. Ούτε περιγράφει πώς αυξάνουν πεπερασμένα σφάλματα.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ένα διατηρητικό σύστημα έχει $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$, ενώ ένα μη διατηρητικό $\sum_{i=1}^m \lambda_i < 0$. Η εκθετική απόκλιση ή σύγκλιση των γειτονικών τροχιών (εκθέτες Lyapunov) είναι ο πιο ισχυρός ενδείκτης ντετερμινιστικού χάους. Οι εκθέτες Lyapunov αποτελούν τους μέσους εκθετικούς ρυθμούς απόκλισης ή σύγκλισης γειτονικών τροχιών στο χώρο των φάσεων. Κάθε σύστημα το οποίο περιέχει έναν τουλάχιστον θετικό εκθέτη Lyapunov είναι εξ' ορισμού χαοτικό, με το πλάτος του εκθέτη να αντανακλά τη χρονική κλίμακα στην οποία τα δυναμικά χαρακτηριστικά του συστήματος γίνονται απρόβλεπτα. Για ένα δοθέν σύστημα μία αλλαγή στις παραμέτρους θα αλλάξει και το φάσμα Lyapunov και πιθανότατα τον τύπο του φάσματος αλλά και τον τύπο του ελκυστή (συγχρόνως). Τα πλάτη των εκθετών Lyapunov χαρακτηρίζουν τα δυναμικά χαρακτηριστικά του ελκυστή σε πληροφοριακό περιεχόμενο. Οι εκθέτες μετρούν το ρυθμό με τον οποίο οι διαδικασίες του συστήματος δημιουργούν ή καταστρέφουν πληροφορία. Έτσι, οι εκθέτες μετρούνται σε bit /επανάληψη για ένα διακριτό σύστημα και σε bits/s ή bits/τροχιά για ένα συνεχές σύστημα. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι εκθέτες Lyapunov δεν είναι τοπικές ποσότητες ούτε με τη χρονική ούτε με τη χωρική έννοια.

Από μία άποψη, μπορούμε να πούμε ότι οι εκθέτες μετρούν το ρυθμό με τον οποίο το σύστημα καταστρέφει πληροφορία. Οι θετικοί εκθέτες παρέχουν ένα μέτρο του πόσο γρήγορα χάνεται η πληροφορία που περιέχεται σε ένα σύνολο από αρχικές συνθήκες, αρχικά πολύ κοντά η μία στην άλλη, εξ' αιτίας των ενεργειών δίπλωσης και άπλωσης του χαοτικού ελκυστή. Οι αρνητικοί εκθέτες παρέχουν το μέσο ρυθμό με τον οποίο χάνεται η πληροφορία που περιέχεται. Η ασυμπτωτική μείωση μιας διαταραχής στον ελκυστή κυβερνάται από το λιγότερο αρνητικό εκθέτη, ο οποίος μπορεί να εκτιμηθεί πιο εύκολα από όλους τους αρνητικούς εκθέτες.

Για τον προσεγγιστικό προσδιορισμό μιας κατάστασης στο φασικό χώρο απαιτείται μια ποσότητα πληροφορίας για τις τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών, που είναι μέτρο της απαιτούμενης ακρίβειας. Ο ρυθμός μείωσης της πληροφορίας αυτής κατά την εξέλιξη του συστήματος λέγεται εντροπία Kolmogorov-Sinai ή μετρική εντροπία και είναι ίση με το άθροισμα όλων των θετικών εκθετών Lyapunov:

$$K = \sum_{i=1}^j \lambda_i, \lambda_i > 0 \quad (5.13)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, για χαοτικά δυναμικά συστήματα $K > 0$, ενώ για μη χαοτικά $K = 0$. Όταν $K \rightarrow +\infty$ το σύστημα 'ξεχνά' αμέσως την κατάστασή του, όλες οι επιτρεπτές καταστάσεις στο φασικό χώρο είναι ισοπίθανες και το σύστημα γίνεται εργοδικό.

Σημειώνεται ότι, εάν διατάξουμε τους εκθέτες Lyapunov κατά φθίνουσα σειρά και αν j είναι ο δείκτης του ελάχιστου μη αρνητικού εκθέτη, αποδεικνύεται [62] πως η διάσταση πληροφορίας παρέχεται από τη σχέση:

$$D_1 = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} \quad (5.14)$$

5.4.1 Καθορισμός του φάσματος των εκθετών Lyapunov

Έστω συνεχές δυναμικό σύστημα στον m -διάστατο φασικό χώρο και απειροελάχιστη m -διάστατη σφαίρα αρχικών συνθηκών. Η σφαίρα αυτή των αρχικών συνθηκών θα εξελιχθεί σε ένα m -διάστατο ελλειψοειδές εξαιτίας της παραμόρφωσης που προκαλείται τοπικά από τη ροή. Στην περίπτωση αυτή, ο i -οστός μονοδιάστατος εκθέτης Lyapunov ορίζεται σε σχέση με το μήκος του κύριου άξονα του ελλειψοειδούς $p_i(t)$:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log_2 \frac{p_i(t)}{p_i(0)} \quad (5.15)$$

όπου τα αντίστοιχα λ_i είναι διατεταγμένα από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο. Αν και η ύπαρξη του παραπάνω ορίου έχει αμφισβητηθεί, το γεγονός είναι ένα: η τροχιακή απόκλιση ενός οποιουδήποτε συνόλου δεδομένων μπορεί να μετρηθεί ποσοτικά. Ακόμη και στην περίπτωση που δεν υπάρχει το όριο για το υποκείμενο σύστημα ή δεν είναι δυνατόν να προσεγγιστεί επειδή έχουμε πεπερασμένες ποσότητες από δεδομένα μη απαλλαγμένα από θόρυβο, οι εκτιμήσεις των εκθετών Lyapunov μας παρέχουν ένα χρήσιμο χαρακτηρισμό του συνόλου των δεδομένων. Έτσι, οι εκθέτες Lyapunov σχετίζονται με τη διαστελλόμενη ή συστέλλόμενη φύση διαφορετικών κατευθύνσεων στο χώρο των φάσεων. Από τη στιγμή που ο προσανατολισμός του ελλειψοειδούς αλλάζει συνεχώς καθώς εξελίσσεται ο χρόνος, οι κατευθύνσεις που σχετίζονται με ένα δοθέντα εκθέτη ποικίλλουν κατά έναν πολύπλοκο τρόπο σε όλη την έκταση του ελκυστή. Παρόλα αυτά, δεν είμαστε σε θέση να μιλάμε για μία ικανοποιητικώς προσδιορισμένη κατεύθυνση η οποία και θα σχετίζεται με το δοθέντα εκθέτη.

Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς, η γραμμική έκταση του ελλειψοειδούς μεγαλώνει με το $2^{\lambda_1 t}$, η περιοχή που καθορίζεται από τους δύο πρώτους κύριους άξονες αναπτύσσεται με το

$2^{(\lambda_1+\lambda_2)t}$, ο όγκος που καθορίζεται από τους τρεις πρώτους κύριους άξονες μεγαλώνει με το $2^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 t}$ χ.ο.χ.

Κάθε συνεχές χρονικά εξαρτώμενο δυναμικό σύστημα χωρίς ένα σταθερό σημείο θα έχει έναν τουλάχιστον μη μηδενικό εκθέτη, που αντιστοιχεί στην αργή μεταβολή του πλάτους ενός κύριου άξονα εφαπτόμενου στη ροή. Οι άξονες που βρίσκονται σε διαστολή (συστολή) αντιστοιχούν σε θετικούς (αρνητικούς) εκθέτες. Το άθροισμα των εκθετών Lyapunov εκφράζει τη μέση χρονική απόκλιση στο χώρο των φάσεων. Έτσι, οποιοδήποτε φθίνον δυναμικό σύστημα έχει έναν τουλάχιστον αρνητικό εκθέτη, το άθροισμα όλων των εκθετών είναι αρνητικό και οι τροχιές κινούνται παροδικά σε ένα περιορισμένο σύνολο μηδενικού όγκου, έναν ελκυστή.

Η εκθετική επέκταση που υποδεικνύεται από ένα θετικό εκθέτη Lyapunov, είναι ασύμβατη με την κίνηση που έχουμε σε έναν οριοθετημένο ελκυστή · εκτός της περίπτωσης που κάποιο είδος διαδικασίας αναδίπλωσης μπορέσει να συγχωνεύσει τροχιές που παρουσιάζουν έναν ευρύτερο διαχωρισμό. Ο κάθε θετικός εκθέτης αντανakλάει μία κατεύθυνση στο χώρο των φάσεων, όπου οι επαναλαμβανόμενες διαδικασίες απλώματος και δίπλωσης συμβάλλουν στον αποσυσχετισμό των γειτονικών καταστάσεων στον ελκυστή. Επομένως, δεν μπορεί να προβλεφθεί για μεγάλο χρονικό διάστημα η συμπεριφορά μιας αρχικής συνθήκης που προσδιορίζεται από κάθε είδους αβεβαιότητα.

Όταν δίνονται οι εξισώσεις που περιγράφουν το δυναμικό σύστημα, τότε είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε ολόκληρο το φάσμα Lyapunov. Αυτό γίνεται εάν επιλύσουμε αριθμητικά το σύνολο των m εξισώσεων του συστήματος για $m + 1$ γειτονικές αρχικές συνθήκες. Κατά τη διάρκεια της επίλυσης του συστήματος μετράμε την ανάπτυξη των αντίστοιχων διανυσμάτων και όσο το σύστημα εξελίσσεται, τα διανύσματα επαναορθοκανονικοποιούνται συνεχώς χρησιμοποιώντας τη διαδικασία Gram-Schmidt. Αυτό έχει ως συνέπεια ένα μόνο διάνυσμα να είναι προς τη κατεύθυνση της γρηγορότερης διαστολής. Ωστόσο, στην περίπτωση των συστημάτων που παρατηρούνται πειραματικά, οι εξισώσεις της κίνησης είναι συνήθως άγνωστες, οπότε η προσέγγιση αυτή δεν είναι δυνατό να εφαρμοστεί άμεσα. Επιπλέον, τα πειραματικά δεδομένα αποτελούνται συνήθως από χρονοσειρές μιας μόνο παρατηρούμενης μεταβλητής, και θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια κατάλληλη τεχνική για την ανακατασκευή του ελκυστή, όπως είναι η μέθοδος των καθυστερήσεων.

Ο υπολογισμός ολόκληρου του φάσματος των εκθετών Lyapunov δεν μπορεί να γίνει επί- λέγοντας αυθαίρετα κατευθύνσεις στο χώρο των φάσεων για τη μέτρηση του διαχωρισμού των γειτονικών αρχικών συνθηκών. Εκείνο που πρέπει να ληφθεί υπόψη, είναι η μέτρηση του διαχωρισμού κατά μήκος των κατευθύνσεων Lyapunov που αντιστοιχούν στους κύριους άξονες του ελλειψοειδούς. Αυτές οι κατευθύνσεις Lyapunov εξαρτώνται από τη ροή του συστήματος και ορίζονται με τη βοήθεια του πίνακα Jacobi. Γι' αυτό είναι απαραίτητο να διατηρηθεί ο κατάλληλος προσανατολισμός στο χώρο των φάσεων. Ωστόσο, η απαίτηση αυτή δεν είναι απαραίτητη όταν πρόκειται να υπολογίσουμε μόνο το μεγαλύτερο εκθέτη Lyapunov.

Υποθέτοντας ότι υπάρχει ένα εργοδικό μέτρο μέτρησης του συστήματος, τότε το εργοδικό πολλαπλασιαστικό θεώρημα δικαιολογεί τη σχέση αυθαίρετων κατευθύνσεων στο χώρο των φάσεων για τον υπολογισμό του μεγαλύτερου εκθέτη Lyapunov σε ομαλά δυναμικά συστήματα. Αναμένεται (με πιθανότητα ίση με τη μονάδα) ότι αν επιλέξουμε τυχαία δύο αρχικές συνθήκες τότε αυτές θα αποκλίνουν εκθετικά με ένα ρυθμό που δίνεται από το μεγαλύτερο εκθέτη Lyapunov. Δηλαδή, αναμένεται πως ένα τυχαίο διάνυσμα από αρχικές συνθήκες θα συγκλίνει προς την περισσότερο ασταθή πολλαπλότητα, αφού η εκθετική ανάπτυξη προς αυτή την κατεύθυνση γρήγορα θα κυριαρχήσει της διαστολής (ή συστολής) κατά μήκος των άλλων κατευθύνσεων Lyapunov. Έτσι, ο μεγαλύτερος εκθέτης Lyapunov ορίζεται με βάση την παρακάτω εξίσωση:

$$d(t) = Ce^{\lambda_1 t} \quad (5.16)$$

όπου $d(t)$ είναι η μέση απόκλιση σε χρόνο t και C είναι μία σταθερά για την κανονικοποίηση του αρχικού διαχωρισμού.

Για εφαρμογές σε πειραματικά δεδομένα, έχουν προταθεί από διάφορους ερευνητές αλγόριθμοι υπολογισμού των εκθετών Lyapunov. Οι μέθοδοι αυτοί αξιολογούνται σε σχέση με την αξιοπιστία τους για μικρά σύνολα δεδομένων, το απαιτούμενο πλήθος υπολογισμών και τη δυσκολία υλοποίησης. Οι μέθοδοι υπολογισμού των εκθετών Lyapunov διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:

- Οι μέθοδοι υπολογισμού του μεγαλύτερου εκθέτη λ_1
- Οι μέθοδοι υπολογισμού του συνολικού φάσματος Lyapunov

Οι πιο γνωστοί αλγόριθμοι της πρώτης κατηγορίας έχουν προταθεί από τους Wolf et al. [139], Frank et al [36] και Rosenstein et al. [104]. Οι πιο γνωστές από τη δεύτερη κατηγορία μέθοδοι είναι οι αλγόριθμοι των Sano και Savada [109], Eckmann et al. [28] και Brown et al. [15]. Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζουμε τους αλγόριθμους αυτούς.

5.4.2 Αλγόριθμος του Wolf

Από τις πρώτες μεθόδους υπολογισμού του μεγαλύτερου εκθέτη Lyapunov λ_1 μιας χρονοσειράς είναι αυτή που παρουσιάστηκε από τους Wolf et. al. [139]. Η εκτίμηση του λ_1 είναι δυνατή από τη στιγμή που ο ελκυστής έχει ανακατασκευαστεί. Από τη θεωρία είναι γνωστό πως ο λ_1 είναι δυνατόν να εκτιμηθεί, εάν παρακολουθήσουμε για μεγάλη χρονική περίοδο την εξέλιξη ενός ζεύγους γειτονικών τροχιών. Ωστόσο, ο ανακατασκευασμένος ελκυστής περιλαμβάνει μόνο μία τροχιά. Παρόλα αυτά, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα σημεία που παίρνουμε από την ανακατασκευή κείτονται σε διαφορετικές τροχιές και να επιλέξουμε δύο σημεία των οποίων ο χρονικός διαχωρισμός στην αρχική χρονοσειρά είναι τουλάχιστον ίσος με μία μέση τροχιακή περίοδο. Όσο ο χωρικός διαχωρισμός στον ανακατασκευασθέντα ελκυστή είναι μικρός, μπορεί κανείς να θεωρήσει ότι τα δύο αυτά σημεία προσδιορίζουν την προηγούμενη κατάσταση του πρώτου κύριου άξονα. Στη συνέχεια παρακολουθούμε το διαχωρισμό τους και όταν γίνει αρκετά μεγάλος, το σημείο που δεν ανήκει στην κύρια τροχιά αντικαθίσταται από ένα σημείο πλησίον της κύριας τροχιάς. Έπειτα παρακολουθούμε την εξέλιξη του διαχωρισμού για τα δύο νέα αυτά σημεία. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία αρκετές φορές, οδηγούμαστε σε μία εκτίμηση για το μεγαλύτερο εκθέτη λ_1 .

Με βάση τα παραπάνω ο αλγόριθμος υπολογισμού του λ_1 μιας χρονοσειράς $x(t)$ ξεκινά με την ανακατασκευή του χώρου των φάσεων διάστασης m με τη βοήθεια συντεταγμένων καθυστερήσεων, όπως περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ένα σημείο στον ελκυστή περιγράφεται από ένα διάνυσμα κατάστασης της μορφής $X(t) = (x(t) \ x(t + \tau) \ \cdots \ x(t + (m - 1)\tau))$, όπου με τ συμβολίζεται ο χρόνος καθυστέρησης. Έπειτα εντοπίζουμε τον πλησιέστερο γείτονα (κατά την Ευκλείδεια έννοια) προς το αρχικό αυτό σημείο που περιγράφεται από το διάνυσμα κατάστασης $X(t_0) = (x(t_0) \ x(t_0 + \tau) \ \cdots \ x(t_0 + (m - 1)\tau))$. Συμβολίζουμε την απόσταση μεταξύ των δύο αυτών σημείων με $\mathcal{L}(t_0)$. Με την πάροδο του χρόνου, σε μία χρονική στιγμή t_1 η αρχική απόσταση μεταξύ των δύο σημείων θα εξελιχθεί σε $\mathcal{L}'(t_1)$. Η εξέλιξη αυτή αναπαράγεται σε όλη την έκταση του ελκυστή για ένα χρονικό διάστημα αρκετά μικρό, ούτως ώστε να εξετάζεται μία μικρή κλίμακα της δομής του ελκυστή. Εάν ο χρόνος κατά τον οποίο εξελίσσεται ο υπολογισμός της απόστασης είναι πολύ μεγάλος, πιθανόν να διαπιστώσουμε ότι η απόσταση \mathcal{L}' συρρικνώνεται. Αυτό συμβαίνει όσο οι δύο τροχιές, που προσδιορίζουν τη συγκεκριμένη απόσταση, περνούν μέσα από μία περιοχή αναδίπλωσης του ελκυστή. Το αποτέλεσμα σε μια τέτοια περίπτωση θα ήταν μία όχι ικανοποιητική και πιθανότατα λανθασμένη εκτίμηση για το λ_1 . Δεν έχουμε επομένως παρά να αναζητήσουμε ένα καινούριο σημείο που πρέπει να ικανοποιεί τα εξής κριτήρια:

1. Ο διαχωρισμός $\mathcal{L}(t_1)$ αυτού του σημείου από το σημείο της κύριας τροχιάς που έχει εξελιχθεί θα πρέπει να είναι μικρός.
2. Η γωνιακή απόκλιση μεταξύ των δύο σημείων (του σημείου αντικατάστασης και του εξελιγμένου σημείου της κύριας τροχιάς) θα πρέπει επίσης να είναι μικρή.

Στην περίπτωση που δεν μπορούμε να βρούμε ένα κατάλληλο σημείο αντικατάστασης, δεν έχουμε παρά να διατηρήσουμε τα ήδη χρησιμοποιηθέντα σημεία. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρις ότου η κύρια τροχιά που έχουμε επιλέξει, διατρέξει όλο το σύνολο των δεδομένων. Στο σημείο αυτό υπολογίζουμε το λ_1 ως

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{k=1}^M \log_2 \frac{\mathcal{L}'(t_k)}{\mathcal{L}(t_{k-1})} \quad (5.17)$$

όπου με M συμβολίζουμε το συνολικό αριθμό των βημάτων αντικατάστασης. Συνήθως, το χρονικό βήμα $\Delta = t_{k-1} - t_k$ μεταξύ των αντικαταστάσεων διατηρείται σταθερό. Στην οριακή περίπτωση ενός άπειρου πλήθους από πειραματικά δεδομένα, απαλλαγμένα θορύβου, τα διανύσματα αντικατάστασης είναι απειροελάχιστου πλάτους, χωρίς λάθη προσανατολισμού και το λ_1 λαμβάνεται εξ' ορισμού.

Στην περίπτωση των πραγματικών πειραματικών δεδομένων είναι απαραίτητο να γίνει κάποιου είδους συμβιβασμός μεταξύ του μήκους των υποψηφίων διανυσμάτων αντικατάστασης που απαιτείται και της ελαχιστοποίησης των αλλαγών προσανατολισμού στο φασικό χώρο. Από τη μια πλευρά, η διάδοση των μικρότερων διανυσμάτων γίνεται γρηγορότερα στο χρόνο, έχοντας σαν αποτέλεσμα η εμφάνιση των λαθών προσανατολισμού να μην είναι τόσο συχνή. Από την άλλη πλευρά, πιθανόν να επιθυμούμε την απ' ευθείας ελαχιστοποίηση των λαθών προσανατολισμού. Θα πρέπει επίσης να λάβουμε υπόψη μας ότι μικρά διανύσματα ενδέχεται να περιέχουν σχετικώς μεγάλα ποσά θορύβου. Έτσι, αναζητάμε σε διαδοχικά μεγαλύτερα μήκη κλίμακας, αντικαταστάτες με την ελάχιστη αλλαγή στον προσανατολισμό στο χώρο των φάσεων. Σημειώνεται ότι η συσσώρευση των λαθών προσανατολισμού δικαιολογημένα αποτελεί πρόβλημα. Ωστόσο, αποδεικνύεται [139] ότι τα λάθη που αφορούν ένα συγκεκριμένο προσανατολισμό για κάποιο χρόνο αντικατάστασης συρρικνώνονται σε μια τιμή αμελητέα συγκρινόμενη με το επόμενο λάθος προσανατολισμού, υπό την προϋπόθεση ότι οι χρόνοι διάδοσης είναι αρκετά μεγάλοι. Το πλήθος των δεδομένων που απαιτείται για τον υπολογισμό του εκθέτη λ_1 εξαρτάται από τρεις ξεχωριστούς παράγοντες:

- Το απαραίτητο πλήθος από σημεία, προκειμένου να έχουμε ένα σημαντικό αριθμό διαθέσιμων σημείων αντικατάστασης,
- Τον αριθμό των τροχιών με δεδομένα ανά τροχιά που απαιτούνται για να ερευνήσουμε το 'άπλωμα' μέσα στον ελκυστή και
- Τον αριθμό των σημείων πληροφορίας ανά τροχιά που είναι απαραίτητα για την κατάλληλη ανακατασκευή του ελκυστή με συντεταγμένες καθυστερήσεων

Το πλήθος των σημείων που απαιτούνται, εκτιμάται ότι εξαρτάται από τους εξής παράγοντες: τη φράκταλ διάσταση του ελκυστή, τον αριθμό των μη αρνητικών εκθετών στο σύστημα και τις γεωμετρικές απαιτήσεις προκειμένου να πάρουμε αποδεκτά σημεία αντικατάστασης. Αν διατηρήσουμε σταθερή την περίοδο δειγματοληψίας και αυξήσουμε διαδοχικά, διπλασιάζοντας κάθε φορά, τον αριθμό των σημείων που ορίζουν τον ελκυστή τότε η ακρίβεια της εκτίμησης που θα πάρουμε για τον πρώτο εκθέτη λ_1 θα είναι ανάλογη. Τέλος, σημειώνεται ότι ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε από τους Wolf et al. αποτυγχάνει στην προσπάθειά του να εκμεταλλευτεί όλα τα διαθέσιμα δεδομένα, διότι επικεντρώνεται σε μια βασική τροχιά. Ένας πλησιέστερος γείτονας ακολουθείται και αντικαθίσταται επαναληπτικά μόλις ο διαχωρισμός του από την τροχιά αναφοράς γίνει μεγαλύτερος ενός συγκεκριμένου ορίου. Ακόμη, απαιτείται πρόσθετη πολυπλοκότητα στους υπολογισμούς εφόσον η μέθοδος προσεγγίζει τη διαδικασία Gram-Schmidt αντικαθιστώντας ένα γείτονα με έναν άλλο που να διατηρεί τον προσανατολισμό του στο χώρο των φάσεων. Ωστόσο, αυτή η διατήρηση του προσανατολισμού στο χώρο των φάσεων δεν είναι απαραίτητη όταν έχουμε να κάνουμε με τον υπολογισμό μόνο του μεγαλύτερου εκθέτη Lyapunov.

5.4.3 Αλγόριθμος του Frank

Οι Frank et al. [36] τροποποίησαν τον αλγόριθμο του Wolf μεταβάλλοντας την επιλογή του μη βασικού σημείου. Σύμφωνα με την τροποποίηση αυτή, υπολογίζεται η προτεραιότητα όλων των υποψήφίων για αντικατάσταση σημείων, σταθμίζοντας την απόσταση και τη γωνία σύμφωνα με τη συνάρτηση:

$$w(r, \theta) = \left(\alpha + \beta \left(\frac{b-r}{b-a} \right)^\gamma \right) \cdot \cos \theta \quad (5.18)$$

όπου b, a είναι οι αποστάσεις στις οποίες η δυναμική θεωρείται γραμμική και στις οποίες κυριαρχεί ο θόρυβος, αντίστοιχα. Με r συμβολίζεται η ακτινική απόσταση μεταξύ του υποψηφίου και του σημείου που εξελίσσεται. Οι παράμετροι α, β και γ ελέγχουν τη σχετική βαρύτητα προτεραιότητας που παρουσιάζει η εγγύτητα σε σχέση με την ευθυγράμμιση.

5.4.4 Αλγόριθμος του Rosenstein

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο των Rosenstein et al. για τον υπολογισμό του μεγαλύτερου εκθέτη Lyapunov από μια πειραματική χρονοσειρά. Η μέθοδος προκύπτει απευθείας από τον ορισμό του μεγαλύτερου εκθέτη Lyapunov και είναι ακριβής επειδή εκμεταλλεύεται όλα τα διαθέσιμα δεδομένα. Αξίζει να σημειωθεί πως η μέθοδος αυτή είναι αξιόπιστη για χρονοσειρές μικρού μήκους, γρήγορη αλλά και σχετικά εύκολη στην υλοποίηση. Η μέθοδος έχει σαν πρώτο βήμα την ανακατασκευή του ελκυστή από τη χρονοσειρά $x(i), i = 1, 2, \dots, N$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των καθυστερήσεων που περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η ανακατασκευασθείσα τροχιά παριστάνεται σαν ένας πίνακας X του οποίου η κάθε γραμμή παριστάνει ένα διάνυσμα στο χώρο των φάσεων. Δηλαδή,

$$X = [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_M]^T \quad (5.19)$$

όπου με $X_i = (x(i) \quad x(i+1) \quad \dots \quad x(i+(m-1)\tau))$ συμβολίζουμε την κατάσταση του συστήματος τη διακριτή χρονική στιγμή i . Επομένως, ο X είναι ένας $M \times m$ πίνακας, όπου οι σταθερές m, M, τ και N συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση $M = N - (m-1)\tau$.

Μετά την ανακατασκευή του ελκυστή στο χώρο των φάσεων, ο αλγόριθμος εντοπίζει τον πλησιέστερο γείτονα κάθε κατάστασης. Η εύρεση του πλησιέστερου γείτονα, X_j πραγματοποιείται με την αναζήτηση του σημείου που ελαχιστοποιεί την απόσταση από το συγκεκριμένο σημείο αναφοράς, X_j , δηλαδή

$$d_j(0) = \min_{X_j} (\|X_j - X_j\|) \quad (5.20)$$

όπου με $d_j(0)$ συμβολίζουμε την αρχική απόσταση του j -οστού σημείου και του πλησιέστερου γείτονά του και με $\|\cdot\|$ συμβολίζουμε την ευκλείδεια νόρμα. Επιπλέον, επιβάλλουμε τον πρόσθετο περιορισμό ότι οι πλησιέστεροι γείτονες πρέπει να έχουν ένα χρονικό διαχωρισμό μεγαλύτερο από τη μέση περίοδο της χρονοσειράς, δηλαδή

$$|j - \hat{j}| > \text{μέση περίοδο}$$

Η παραπάνω συνθήκη μας επιτρέπει να θεωρήσουμε το κάθε ζεύγος γειτόνων ως κοντινές αρχικές συνθήκες για διαφορετικές τροχιές. Έτσι, η εκτίμηση του μεγαλύτερου εκθέτη Lyapunov προκύπτει από το μέσο ρυθμό διαχωρισμού των πλησιέστερων γειτόνων.

Από τον ορισμό του λ_1 θεωρούμε το j -οστό ζεύγος πλησιέστερων γειτόνων που αποκλίνει προσεγγιστικά με ρυθμό που δίνεται από το μεγαλύτερο εκθέτη Lyapunov:

$$d_j(i) \simeq C_j e^{\lambda_1(i\Delta t)} \quad (5.21)$$

όπου με C_j συμβολίζεται ο αρχικός διαχωρισμός. Αν λογαριθμίσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (5.21), έχουμε:

$$\ln d_j(i) \simeq \ln C_j + \lambda_1(i\Delta t) \quad (5.22)$$

Η εξίσωση (5.22) αναπαριστά ένα σύνολο από κατά προσέγγιση παράλληλες ευθείες (για $j = 1, 2, \dots, M$), καθεμία από τις οποίες έχει κλίση ανάλογη του λ_1 . Ο υπολογισμός του μεγαλύτερου εκθέτη Lyapunov γίνεται εύκολα και με ακρίβεια αν χρησιμοποιηθεί μια ελάχιστη τετραγωνική προσέγγιση προς τη 'μέση' γραμμή που ορίζεται από τη σχέση:

$$y(i) = \frac{1}{\Delta t} < \ln d_j(i) > \quad (5.23)$$

όπου με $< \cdot >$ συμβολίζουμε τη μέση τιμή για όλα τα j .

Η διαδικασία αυτή για την εύρεση του μέσου όρου είναι το κλειδί για τον ακριβή υπολογισμό της τιμής του λ_1 από μικρά και με θόρυβο σύνολα δεδομένων. Αξίζει να σημειωθεί πως στην εξίσωση (5.21), το C_j χρησιμοποιείται για την κανονικοποίηση του διαχωρισμού μεταξύ των γειτόνων, αλλά όπως φαίνεται και από την εξίσωση (5.22), αυτή η κανονικοποίηση δεν είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό του λ_1 . Η δυνατότητα αποφυγής της κανονικοποίησης παρέχει στη μέθοδο ένα υπολογιστικό πλεονέκτημα.

5.4.5 Αλγόριθμος των Sano και Sawada

Ο αλγόριθμος των Sano και Sawada θεωρεί ένα σημείο αναφοράς j και υπολογίζει τις αποστάσεις των γειτόνων του που βρίσκονται εντός μιας σφαίρας με μικρή ακτίνα. Στη συνέχεια παρακολουθεί την εξέλιξη των αποστάσεων αυτών σε χρόνο T και εφαρμόζει έναν αλγόριθμο ελαχίστων τετραγώνων για τον υπολογισμό της γραμμικής απεικόνισης A_j που περιγράφει την εξέλιξη των αποστάσεων. Στη συνέχεια ο πίνακας A_j δρα σε μια ορθοκανονική βάση $\{e_i^j\}$. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία n φορές, οι εκθέτες Lyapunov υπολογίζονται ως :

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \sum_{j=1}^n \log \left(|A_j e_i^j| \right), i = 1, \dots, m \quad (5.24)$$

Η αρχική βάση επιλέγεται ελεύθερα. Μετά την δράση της απεικόνισης, ακολουθεί μία Gram-Schmidt διαδικασία ώστε να διατηρηθεί η αμοιβαία ορθογωνιότητα της βάσης.

5.4.6 Αλγόριθμος του Eckmann

Η αλγοριθμική διαδικασία των Eckmann et al. [28] είναι παρόμοια. Στηρίζεται επίσης στην εφαρμογή ενός αλγορίθμου ελαχίστων τετραγώνων για τον υπολογισμό της γραμμικής απεικόνισης. Στη συνέχεια εφαρμόζει μια QR (ορθοκανονική άνω τριγωνική) τεχνική ανάλυσης:

$$A(n+1)Q(n) = Q(n+1)R(n+1) \quad (5.25)$$

όπου το n μετρά το βήμα αναδρομής και $Q(0)$ ο μοναδιαίος πίνακας. Το φάσμα των εκθετών Lyapunov δίνεται από τη σχέση :

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \sum_{j=1}^n \log (R(n)_{ii}), i = 1, \dots, m \quad (5.26)$$

Μια εξαιρετικά ενδιαφέρουσα περίπτωση προκύπτει όταν το βήμα του χρόνου εξέλιξης των γειτόνων γίνει ίσο με τη χρονική καθυστέρηση της ανακατασκευής. Τότε απλοποιείται η γραμμική απεικόνιση A .

5.4.7 Αλγόριθμος του Brown

Ο αλγόριθμος των Brown et al. [15] θεωρεί πιο ακριβείς εκτιμήσεις της απεικόνισης προσεγγίζοντάς τη και με μη γραμμικούς όρους. Μετά την προσέγγιση, ακολουθείται διαδικασία παρόμοια με αυτή του αλγορίθμου των Eckmann et al.

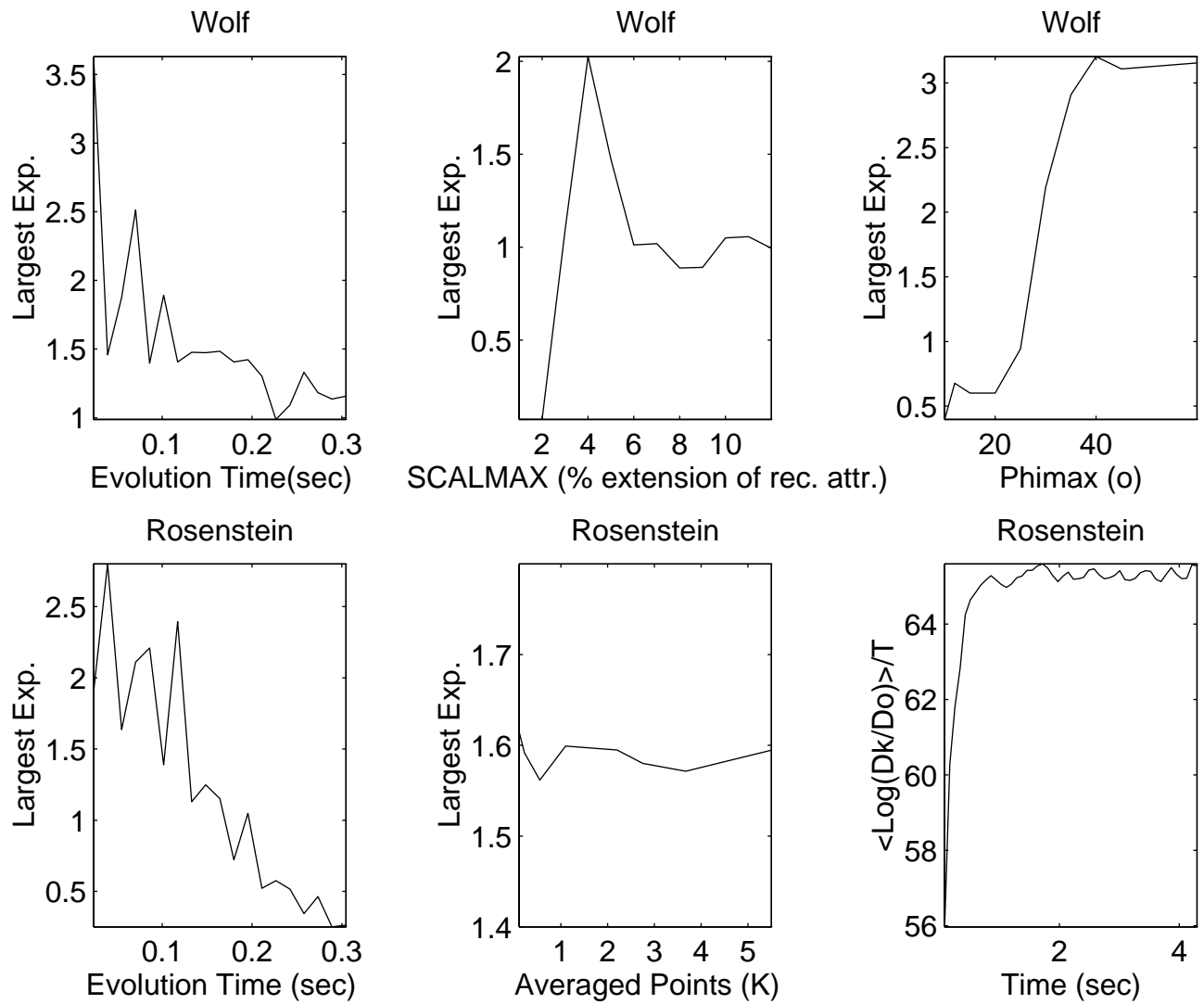
5.5 Συγκριτική μελέτη των αλγορίθμων υπολογισμού των εκθετών Lyapunov

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τους προαναφερόμενους αλγορίθμους υπολογισμού των εκθετών Lyapunov στα ΗΕΓ δεδομένα [71], [72], [73]. Στόχος μας είναι η σύγκριση της αποδοτικότητας των αλγορίθμων και η προσέγγιση των απαντήσεων (εάν υπάρχουν) σε μερικά ανοιχτά θέματα, όπως η εξάρτηση των εκθετών από τις παραμέτρους των αλγορίθμων και τις παραμέτρους ανακατασκευής του φασικού χώρου.

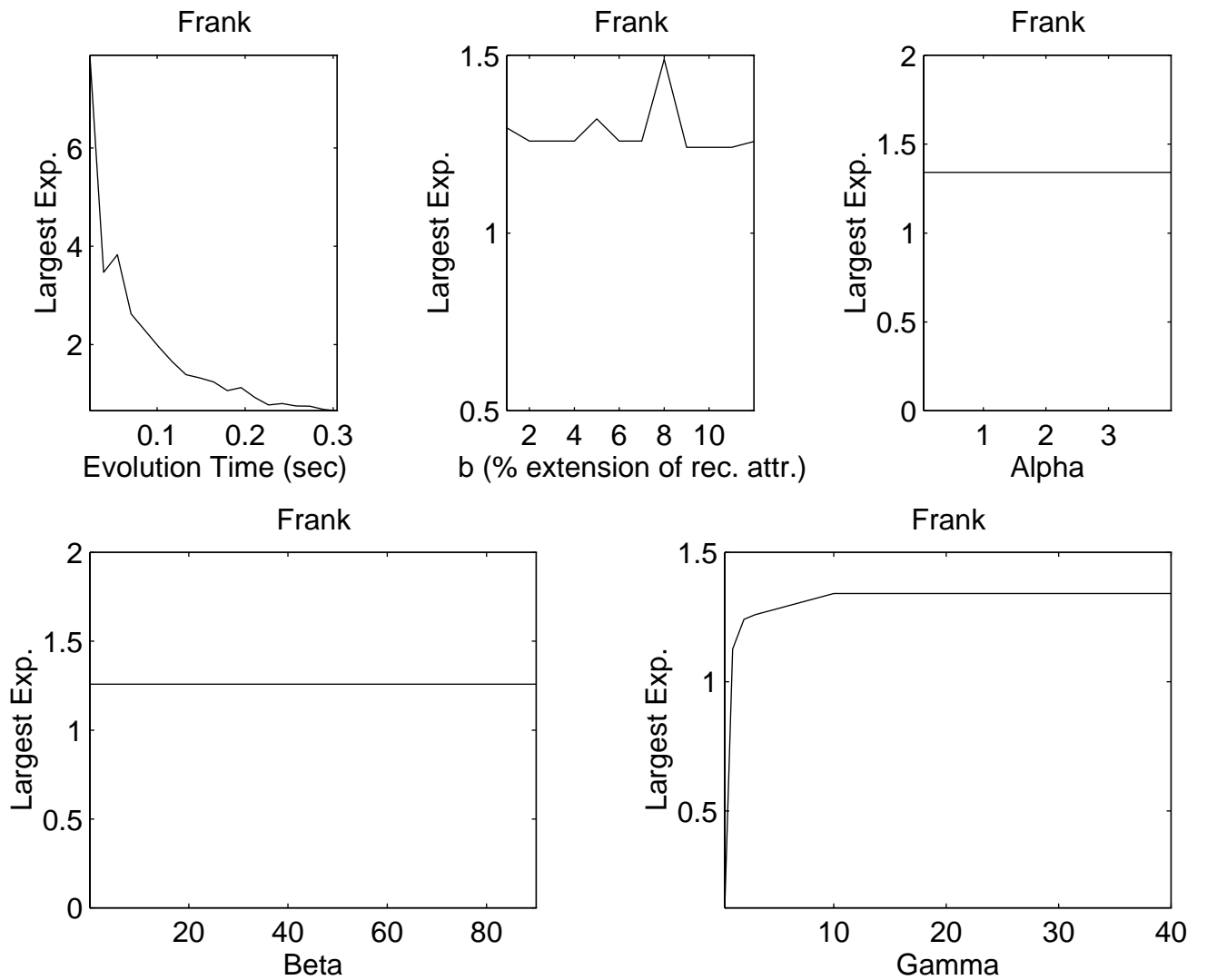
Μελετήσαμε το ΗΕΓ που καταγράφηκε από 5 υγιείς εθελοντές ηλικίας μεταξύ 18 και 28 ετών. Η καταγραφή έγινε σε ήσυχο δωμάτιο, σε καθεστηκυία θέση, με τα μάτια κλειστά. Χρησιμοποιήσαμε 19 ηλεκτρόδια χρυσού με το σύστημα 10 – 20 και δύο ηλεκτρόδια αναφοράς, όλα σταθεροποιημένα με την Grass-EC2 κρέμα. Η συλλογή των ΗΕΓ δεδομένων έγινε με τον ψηφιακό εγκεφαλογράφο BQ100s της Micromed. Το μοντάζ είναι διπολικό σύμφωνα με τα πρότυπα της Αμερικανικής Εγκεφαλογραφικής Εταιρείας. Η προεπεξεργασία των δεδομένων περιλαμβάνει απόρριψη παρασπίτων, ψηφιακό φιλτράρισμα με ζωνοπερατό φίλτρο ($0.1 - 50\text{Hz}$) και ελέγχους στατικότητας ευρείας έννοιας. Το σήμα χωρίστηκε σε εποχές μήκους 5.000 – 30.000 σημείων. Οι αλγόριθμοι των Wolf et al., Frank et al., Rosenstein et al., Sano και Sawada, Eckmann et al. και Brown et al. εφαρμόστηκαν στις εποχές των ακόλουθων απαγωγών $C_z - F_z$, $P_z - C_z$, $O_2 - P_4$, $O_1 - P_3$. Σημειώνουμε ότι η ανακατασκευή του φασικού χώρου έγινε με τη μέθοδο των καθυστερήσεων. Η χρονική καθυστέρηση επιλέχθηκε ως το πρώτο ελάχιστο της συνάρτησης της αμοιβαίας πληροφορίας (T_{mut}). Η διάσταση εμβάπτισης m επιλέχθηκε ως $2 < d_a > +1$, όπου d_a είναι η διάσταση του ελκυστή που υπολογίζεται με τον G-P αλγόριθμο.

5.5.1 Αποτελέσματα

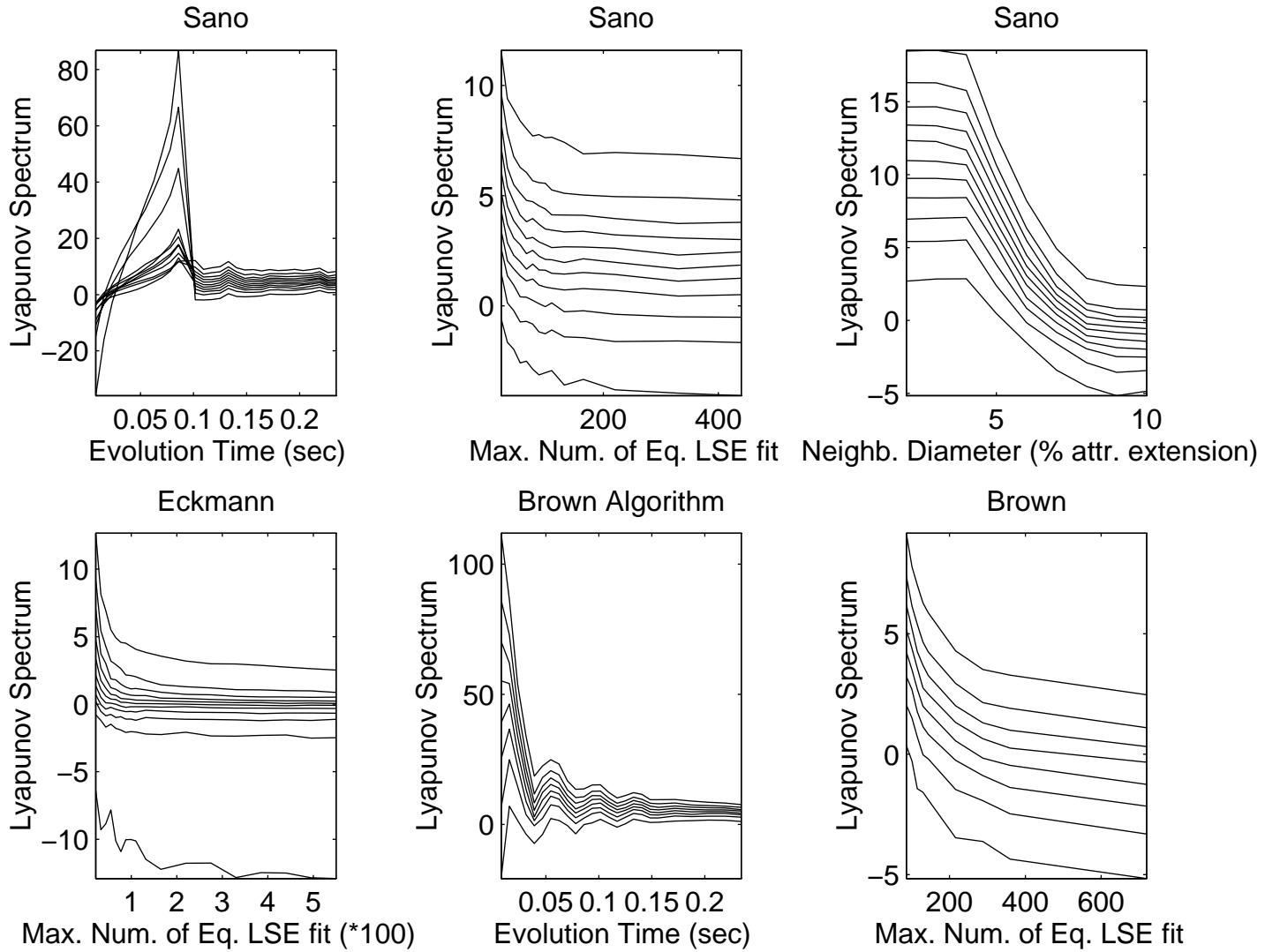
Το σύνολο των παραμέτρων που συμμετέχουν στη διαδικασία επεξεργασίας χωρίζεται σε τρία υποσύνολα. Το πρώτο υποσύνολο περιλαμβάνει τις παραμέτρους που σχετίζονται με τη συλλογή δεδομένων και την προεπεξεργασία. Το δεύτερο σύνολο περιλαμβάνει τις παραμέτρους που σχετίζονται με την ανακατασκευή του ελκυστή. Το τρίτο υποσύνολο περιλαμβάνει τις εσωτερικές παραμέτρους των αλγορίθμων. Η μελέτη μας εστιάζεται στα τελευταία δύο υποσύνολα. Τα Σχήματα 5.2, 5.3 και 5.4 παρουσιάζουν την επίδραση των εσωτερικών παραμέτρων των αλγορίθμων, ενώ τα Σχήματα 5.5, 5.6 και 5.7 και οι Πίνακες 5.1, 5.2 και 5.3 παρουσιάζουν την επίδραση των παραμέτρων ανακατασκευής.



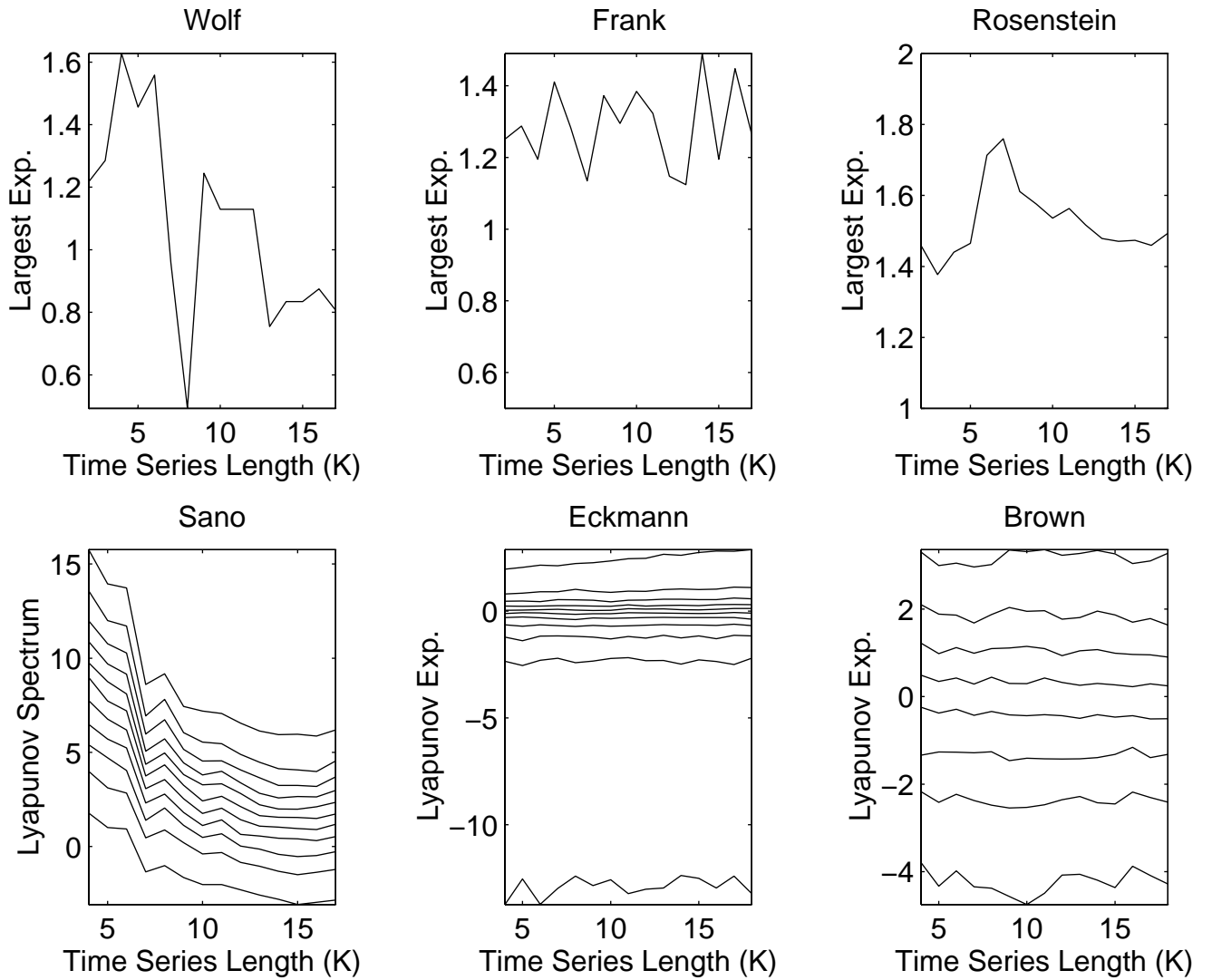
Σχήμα 5.2: Η επίδραση των παραμέτρων των αλγορίθμων των Wolf et al. και Rosenstein et al. στην τιμή του μέγιστου εκθέτη Lyapunov (Διάσταση Εμβάπτισης: $m = 11$, Χρονική καθυστέρηση: $\tau = T_{mut}$, Πλήθος σημείων : $N = 15.000$)



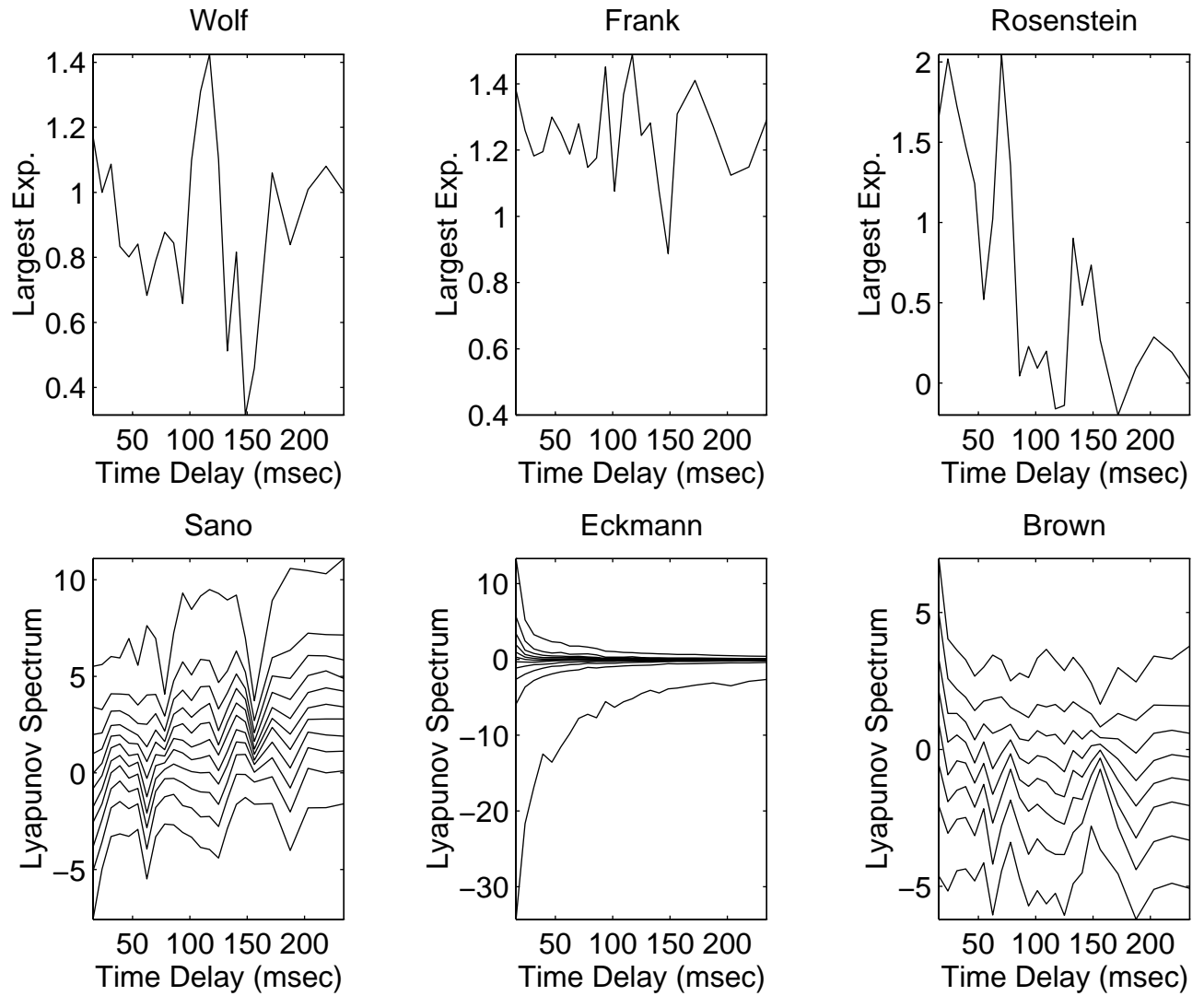
Σχήμα 5.3: Η επίδραση των παραμέτρων του αλγορίθμου των Frank et al. στην τιμή του μέγιστου εκθέτη Lyapunov (Διάσταση Εμβάπτισης: $m = 11$, Χρονική καθυστέρηση: $\tau = T_{mut}$, Πλήθος σημείων : $N = 15.000$)



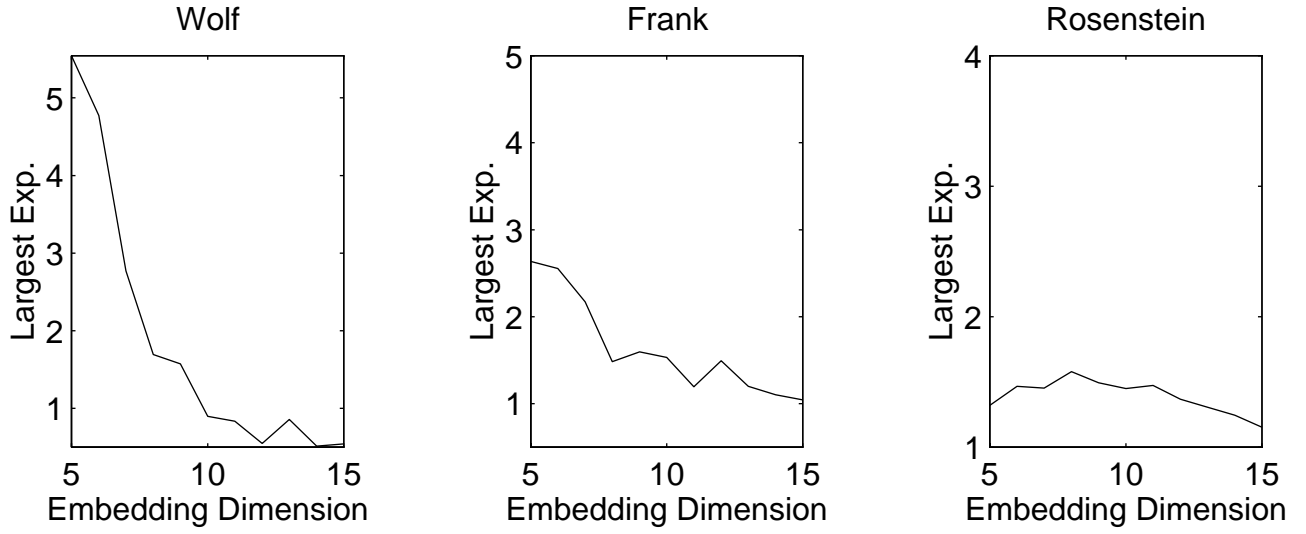
Σχήμα 5.4: Η επίδραση των παραμέτρων των αλγορίθμων των Sano-Sawada, Eckmann et al. και Brown et al. στο φάσμα Lyapunov (Διάσταση Εμβάπτισης: $m = 11$ -ειδικά για τον αλγόριθμο των Brown et al. $m = 8$, Χρονική καθυστέρηση: $\tau = T_{mut}$, Πλήθος σημείων : $N = 15.000$,)



Σχήμα 5.5: Το φάσμα των εκθετών Lyapunov ως συνάρτηση του πλήθους σημείων της χρονοσειράς (Διάσταση Εμβάπτισης: $m = 11$, ειδικά για τον αλγόριθμο των Brown et al. $m = 8$, Χρονική καθυστέρηση: $\tau = T_{mut}$)



Σχήμα 5.6: Το φάσμα των εκθετών Lyapunov ως συνάρτηση της χρονικής καθυστέρησης (Διάσταση Εμβάπτισης: $m = 11$, ειδικά για τον αλγόριθμο των Brown et al. $m = 8$, Πλήθος σημείων : $N = 15.000$)



Σχήμα 5.7: Το φάσμα των εκθετών Lyapunov ως συνάρτηση της διάστασης εμβάπτισης (Χρονική καθυστέρηση: $\tau = T_{mut}$), Πλήθος σημείων $N = 15.000$

Πίνακας 5.1: Το φάσμα των εκθετών Lyapunov υπολογισμένο με βάση τον αλγόριθμο των Sano και Sawada ως συνάρτηση της διάστασης εμβάπτισης: Κανάλι: $P_z - C_z$, $t = T_{mut}$, $N = 15.000$, $d_a = 5.4$

m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}	λ_{11}	λ_{12}
5	5.45	1.37	-1.06	-3.30	-6.75							
6	4.74	1.08	-0.44	-1.66	-3.19	-5.93						
7	4.28	1.09	0.04	-1.00	-2.17	-3.62	-5.55					
8	4.06	1.35	0.43	-0.34	-1.15	-2.11	-3.34	-5.25				
9	3.91	1.69	0.92	0.34	-0.25	-1.03	-1.75	-2.86	-4.75			
10	4.07	2.04	1.39	0.91	0.33	-0.14	-0.71	-1.53	-2.34	-3.92		
11	4.87	3.13	2.37	1.87	1.36	0.93	0.48	-0.14	-0.86	-1.63	-3.13	
12	5.17	3.68	3.01	2.53	2.19	1.76	1.34	0.75	0.09	-0.58	-1.50	-2.86

Πίνακας 5.2: Το φάσμα των εκθετών Lyapunov υπολογισμένο με βάση τον αλγόριθμο των Eckmann et al. ως συνάρτηση της διάστασης εμβάπτισης: Κανάλι: $P_z - C_z$, $t = T_{mut}$, $N = 15.000$, $d_a = 5.4$

m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}	λ_{11}	λ_{12}
5	5.54	1.74	0.11	-1.80	-10.20							
6	5.25	1.45	0.40	-0.54	-2.09	-10.57						
7	4.67	1.19	0.43	-0.13	-0.85	-2.50	-11.15					
8	3.97	0.93	0.45	0.02	-0.39	-1.00	-2.46	-10.93				
9	3.23	1.11	0.48	0.13	-0.11	-0.44	-0.90	-2.10	-13.99			
10	3.02	1.03	0.53	0.22	0.03	-0.19	-0.59	-1.27	-2.40	-13.37		
11	2.74	1.01	0.54	0.25	0.06	-0.12	-0.30	-0.65	-1.16	-2.28	-12.50	
12	2.52	1.01	0.53	0.29	0.13	-0.02	-0.15	-0.38	-0.71	-1.28	-2.15	-14.29

Πίνακας 5.3: Το φάσμα των εκθετών Lyapunov υπολογισμένο με βάση τον αλγόριθμο των Brown et al. ως συνάρτηση της διάστασης εμβάπτισης: Κανάλι: $P_z - C_z$, $t = T_{mut}$, $N = 15.000$, $d_a = 5.4$

m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}	λ_{11}	λ_{12}
5	3.16	0.81	-0.94	-2.55	-5.13							
6	2.83	1.28	-0.11	-1.33	-2.87	-5.26						
7	3.11	1.71	0.85	-0.11	-1.18	-2.29	-4.45					
8	3.28	1.90	0.98	0.25	-0.48	-1.33	-2.48	-4.35				
9	3.40	2.05	1.22	0.64	0.08	-0.51	-1.23	-2.19	-3.83			
10	3.09	2.13	1.55	1.04	0.48	0.03	-0.64	-1.32	-2.12	-3.70		
11	3.38	2.22	1.59	1.10	0.68	0.24	-0.09	-0.67	-1.35	-2.17	-3.63	
12	3.48	2.14	1.56	1.12	0.79	0.44	0.09	-0.23	-0.73	-1.24	-2.08	-3.57

5.5.2 Συμπεράσματα

Η έλλειψη οποιωνδήποτε a-priori γνωστών θεωρητικών τιμών του φάσματος Lyapunov για το HEF δεν επιτρέπει τη σύγκριση των αποτελεσμάτων των αλγορίθμων με βάση μια απόλυτη αναφορά. Έτσι, είναι δυνατή μόνο η σχετική συσχέτιση της αποδοτικότητάς τους.

Ο αλγόριθμος των Wolf et al. παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ευαισθησία στις εσωτερικές του παραμέτρους. Ο λ_1 ποικίλει σε ένα μεγάλο εύρος τιμών όταν μεταβάλλονται η μέγιστη επιτρεπτή απόσταση και γωνία. Επιπρόσθετα, παρουσιάζει σημαντική μεταβολή όταν μεταβάλλονται οι παράμετροι ανακατασκευής.

Ο αλγόριθμος των Frank et al. με την εισαγωγή της συνάρτησης προτεραιότητας βελτιώνει την απόδοση του αλγορίθμου αναφορικά με το μήκος της χρονοσειράς και τη χρονική καθυστέρηση. Οι παράμετροι της συνάρτησης δεν επηρεάζουν την τιμή του λ_1 , σε αντίθεση με τη διάσταση εμβάπτισης. Πρέπει να σημειωθεί ότι και οι δύο προηγούμενοι αλγόριθμοι βασίζονται και εξαρτώνται από την έννοια του βασικού σημείου.

Ο αλγόριθμος των Rosenstein et al. φάνηκε ότι είναι ο περισσότερο ρωμαλέος της κατηγορίας του. Όχι μόνο έχει τις λιγότερες και περισσότερο συντονισιμες εσωτερικές παραμέτρους, αλλά επίσης επηρεάζεται λιγότερο και ομαλότερα από το μήκος της χρονοσειράς και τη διάσταση εμβάπτισης. Η ισχύς του οφείλεται στο γεγονός της ισοδύναμης χρησιμοποίησης όλων (ή σχεδόν όλων) των διαθέσιμων δεδομένων και στην ανάδειξη της γραμμικής περιοχής της καμπύλης του Σχήματος 5.2f.

Ο υπολογισμός του πλήρους φάσματος Lyapunov είναι σίγουρα πολύ πιο δύσκολος από τον υπολογισμό μόνο του μεγαλύτερου εκθέτη. Οι παράμετροι παίζουν σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση των τιμών των εκθετών καθώς και την ποιότητα του φάσματος. Ο αριθμός των θετικών εκθετών, ειδικά για τους αλγόριθμο των Sano-Sawada και Brown et al. εξαρτάται από τις εσωτερικές παραμέτρους τους. Ωστόσο, υπάρχουν διαστήματα όπου οι παράμετροι μπορούν να συντονιστούν. Οι εσφαλμένοι εκθέτες θα μπορούσαν να υπολογιστούν με την παρακολούθηση του φάσματος, καθώς αυξάνει η διάσταση εμβάπτισης.

Το να δωθεί προβάδισμα σε μία από τις Ιακωβιανές μεθόδους δεν είναι εύκολο. Γενικά, όλες συμφωνούν στο πλήθος των θετικών εκθετών. Ο αλγόριθμος των Sano-Sawada φαίνεται ότι επηρεάζεται περισσότερο από τις παραμέτρους ανακατασκευής. Ο απλός αλγόριθμος των Eckmann et al. απαιτεί λιγότερη υπολογιστική ισχύ και δεν είναι ευαίσθητος στο μήκος της χρονοσειράς. Ο αλγόριθμος των Brown et al. φαίνεται να παρουσιάζει ένα μικρό προβάδισμα εξαιτίας του ότι κάνει περισσότερο ακριβείς προσεγγίσεις. Άλλωστε, παρουσιάζει την μικρότερη επίδραση από τις παραμέτρους ανακατασκευής. Το κύριο μειονέκτημά του είναι ο εξαιρετικά μεγάλος χρόνος που απαιτείται για τους υπολογισμούς.

Κεφάλαιο 6

Ανίχνευση Μη Γραμμικότητας

Το αντίστροφο πρόβλημα για ένα μη γραμμικό σύστημα είναι ο προσδιορισμός στην πράξη της υποκείμενης δυναμικής διαδικασίας, όταν το μόνο που είναι διαθέσιμο είναι η χρονοσειρά. Οι αλγόριθμοι που έχουν για το σκοπό αυτό αναπτυχθεί δεν είναι αξιόπιστοι και συνήθως εμπεριέχουν υποκειμενικές κρίσεις, ειδικά όταν πρόκειται για χρονοσειρές μικρής διάρκειας και ενθόρυβες. Οι περισσότεροι ερευνητές συμφωνούν ότι οι μέθοδοι εμπεριέχουν πολλές παγίδες που δεν είναι πάντοτε εύκολο να τις αποφύγει κανείς. Υπάρχουν χρονοσειρές που σαφέστατα παρουσιάζουν χαμηλής διάστασης χαοτική συμπεριφορά, αλλά υπάρχουν πολλές περιπτώσεις που οι ενδείξεις δεν είναι ακριβείς και δύσκολα αξιολογούνται. Η πραγματική δυσκολία προκύπτει επειδή το χαμηλής διάστασης χάος και ο ασυσχέτιστος με το σήμα θόρυβος δεν είναι οι μόνες εναλλακτικές. Οι ακανόνιστες διακυμάνσεις που παρατηρούνται σε μια πειραματική χρονοσειρά οφείλουν τη δυναμική μεταβολή τους σε ένα μείγμα διαφόρων επιδράσεων: χάος, μη χαοτικός αλλά μη γραμμικός ντετερμινισμός, γραμμικές συσχετίσεις και θόρυβος τόσο στη δυναμική όσο και στη μετρητική διάταξη. Στα παραπάνω πρέπει να προστεθεί επίσης και ο μη στατικός χαρακτήρας των περισσότερων πειραματικών χρονοσειρών.

Η θετική ανίχνευση του χάους είναι δύσκολη. Ο συνήθης τρόπος ανίχνευσης συμπεριφοράς χαμηλής διάστασης είναι ο υπολογισμός της διάστασης και η διαπίστωση ότι αυτή είναι μια 'μικρή' τιμή. Σε μια πεπερασμένη ενθόρυβη σειρά, ο αλγόριθμος υπολογισμού της διάστασης δίνει στην καλύτερη περίπτωση προσεγγιστικά αποτελέσματα και συνήθως αρκετά εσφαλμένα. Η προσπάθεια προσδιορισμού των διαφόρων πηγών σφαλμάτων (και συστηματικών και στατιστικών) και στη συνέχεια υπολογισμού των σφαλμάτων των εκτιμήσεων είναι προβληματική για μη γραμμικούς αλγορίθμους, όπως οι εκτιμητές διάστασης. Κι αυτό γιατί ο προσδιορισμός των σφαλμάτων απαιτεί μοντελοποίηση της υποκείμενης διαδικασίας, αλλά αυτό ακριβώς αποτελεί και το αναζητούμενο άγνωστο. Επιπλέον, ακόμη και αν η υποκείμενη διαδικασία ήταν γνωστή, ο αναλυτικός υπολογισμός των σφαλμάτων μπορεί να είναι εξαιρετικά δύσκολος αν όχι αδύνατος.

6.1 Πεπερασμένη διάσταση από στοχαστικές διαδικασίες

Εάν η μετρούμενη χρονοσειρά παράγεται από χαμηλής διάστασης χαοτική δυναμική, παρατηρούμε κορεσμό της διάστασης συσχετισμού για αυξανόμενη διάσταση εμβάπτισης. Από την άλλη πλευρά, κατά την ανάλυση των δεδομένων κανείς δεν ξέρει εάν το σύστημα είναι χαμηλοδιάστατο. Στην πραγματικότητα, αυτή ακριβώς είναι μια από τις ερωτήσεις που η ανάλυση θα πρέπει να απαντήσει και δεν είναι δυνατό να υποθέσει κανείς *a-priori* την παρουσία χάους χαμηλής διάστασης. Εξάλλου μερικές μελέτες [91] αποκάλυψαν ότι από μόνη της η ανίχνευση μιας πεπερασμένης διάστασης από μια μετρούμενη χρονοσειρά δεν είναι αρκετή για να συμπεράνει κανείς την παρουσία χάους χαμηλής διάστασης, αφού υπάρχουν στοχαστικές διαδικασίες που εμφανίζουν σύγκλιση του εκθέτη

συσχετισμού κατά την χρονική εμφάνιση. Οι στοχαστικές αυτές διαδικασίες, χαρακτηρίζονται γενικά από νόμο δύναμης για τη φασματική ισχύ και συμπεριφορά αυτοομοιότητας.

Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία που ορίζεται ως:

$$s(t) = \sum_{j=1}^{N/2} A_j \cos(\omega_j t + \Phi_j)$$

όπου $A_j^2 \propto \omega_j^{-\alpha}$ και οι Φ_j είναι τυχαίες ομοιόμορφα κατανεμημένες φάσεις. Στην περίπτωση αυτή, η διάσταση συσχετισμού δίνεται από τη σχέση $d = d(\alpha) = \frac{2}{\alpha-1}$ για $1 < \alpha \leq 3$. Επίσης, και άλλες στοχαστικές διαδικασίες εμφανίζουν ψευδώς σύγκλιση του εκθέτη συσχέτισης. Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν την αδυναμία της διάκρισης πρακτικά μεταξύ ενός χαμηλής τάξης ντετερμινιστικού χαοτικού συστήματος και ενός στοχαστικού, χρησιμοποιώντας μόνο τη μέθοδο υπολογισμού της διάστασης συσχετισμού.

Ο λόγος που δεν μπορούν να ανιχνευθούν διαφορές μεταξύ χάους και θορύβου στις προηγούμενες περιπτώσεις είναι εξαιτίας της εσωτερικής φράκταλ φύσης του θορύβου. Οι καμπύλες φράκταλ εμφανίζουν φράκταλ διάσταση, η οποία ορίζεται πλήρως από τη φασματική κλίση και επομένως εμφανίζουν κορεσμό της διάστασης καθώς αυξάνει η διάσταση εμφάνισης. Από την άλλη πλευρά, ο ανακατασκευασμένος χώρος δεν είναι ο πραγματικός χώρος του συστήματος, εξαιτίας για παράδειγμα, της μη στατικότητας του σήματος ή του μη επαρκούς μήκους της χρονοσειράς. Επομένως, υπολογίζοντας μόνο την τιμή της διάστασης συσχετισμού δεν μπορούμε να διακρίνουμε μεταξύ παράξενων ελκυστών και φράκταλ στοχαστικών καμπυλών εάν έχουν την ίδια διάσταση.

Για να λυθεί το πρόβλημα αυτό έχουν προταθεί πολλές μέθοδοι. Οι περισσότερες από αυτές βασίζονται στην ιδέα των δεδομένων αντικατάστασης (surrogate). Παράγουμε μια συνθετική χρονοσειρά που έχει όλες, εκτός από μία, τις ιδιότητες του μετρηθέντος σήματος, με στόχο την επιβεβαίωση ότι η τιμή της διάστασης συσχετισμού ή οι εκθέτες Lyapunov εξαρτώνται από την τροποποιημένη ιδιότητα. Ένας από τους πλέον συνηθισμένους ελέγχους είναι αυτός που βασίζεται στην τυχαιοποίηση των φάσεων Fourier. Ο έλεγχος αυτός είναι ο απλούστερος από τις διαθέσιμες τεχνικές δεδομένων αντικατάστασης. Μας επιτρέπει να επιβεβαιώσουμε εάν η παρατηρούμενη σύγκλιση του εκθέτη συσχετισμού οφείλεται στην παρουσία μιας αυτοομοιότητας στοχαστικής διαδικασίας. Στην περίπτωση αυτοομοίων στοχαστικών διαδικασιών, η σύγκλιση του εκθέτη συσχετισμού συσχετίζεται με τις ιδιότητες των ροπών δεύτερης τάξης. Αντίθετα, η πεπερασμένη τιμή της διάστασης συσχετισμού ενός χαμηλής τάξης ντετερμινιστικού συστήματος οφείλεται στις κλειστές επιστροφές στο φασικό χώρο. Αυτές με τη σειρά τους σχετίζονται με την κατανομή των φάσεων Fourier του σήματος. Ο έλεγχος ωστόσο, δεν προσδιορίζει μονοσήμαντα το χάος χαμηλής διάστασης. Εάν το σήμα αντικατάστασης δεν παράγει συγκλίνουσα τιμή του εκθέτη συσχετισμού, δεν μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι το σύστημα εμφανίζει χαοτική συμπεριφορά χαμηλής διάστασης. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να εφαρμοστούν και άλλοι έλεγχοι δεδομένων αντικατάστασης πριν προκύψει κάποιο ασφαλές συμπέρασμα.

Εκτός από τη μέθοδο των δεδομένων αντικατάστασης, χρησιμοποιείται και η μέθοδος των κλειστών επιστροφών. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί μια από τις κύριες ιδιότητες των παράξενων ελκυστών. Είναι γνωστό ότι οι τροχιές στο φασικό χώρο ενός δυναμικού συστήματος χαμηλής διάστασης επιστρέφουν κοντά στις αρχικές τους θέσεις από καιρό σε καιρό, ενώ αντίθετα δεν συμβαίνει το ίδιο για τα στοχαστικά συστήματα. Συνεπώς, μπορεί να σχεδιάσει κανείς το διαχωρισμό στο χώρο ως προς το διαχωρισμό στο χρόνο για τους δύο αυτούς διαφορετικούς τύπους συστημάτων. Τότε, η ύπαρξη των κλειστών αυτών επιστροφών θα προκαλέσει την εμφάνιση ενός μη μονότονου γραφήματος, το οποίο αποτελεί μια επιπλέον ένδειξη της παρουσίας παράξενου ελκυστή.

Στη συνέχεια περιγράφουμε τη μέθοδο ανίχνευσης μη γραμμικότητας με χρήση σειρών δεδομένων αντικατάστασης (surrogate) που προτάθηκε από τους Theiler et al. [127].

6.2 Η μέθοδος των δεδομένων αντικατάστασης

Οι Theiler et al. [127] έχοντας ως στόχο την ανίχνευση μη γραμμικότητας, που είναι πολύ πιο απλούστερη από ότι η ανίχνευση της χαοτικής δυναμικής διατύπωσαν τη μέθοδο των δεδομένων αντικατάστασης. Η μέθοδος συνίσταται στον προσδιορισμό μιας καλά ορισμένης υποκείμενης γραμμικής διαδικασίας (μηδενική υπόθεση) και τον υπολογισμό της κατανομής του μεγέθους ενδιαφέροντος (π.χ. διάσταση συσχετισμού) για μια συλλογή συνόλων από δεδομένα αντικατάστασης, τα οποία είναι απλώς διαφορετικές πραγματοποιήσεις της υποθετικής γραμμικής στοχαστικής διαδικασίας. Στη συνέχεια, αντί για τον υπολογισμό των σφαλμάτων της διάστασης που προκύπτει από το πραγματικό σύνολο δεδομένων, υπολογίζεται αριθμητικά η τυπική απόκλιση όλων των εκτιμήσεων των διαστάσεων των συνόλων των δεδομένων αντικατάστασης.

Η εφαρμογή της μεθόδου αποτελεί ουσιαστικά στατιστικό έλεγχο υπόθεσης. Συμπεριλαμβάνει δύο συστατικά: τη μηδενική υπόθεση έναντι της οποίας ελέγχονται οι παρατηρήσεις και μια στατιστική διαχωρισμού (discriminating statistic). Η μηδενική υπόθεση αποτελεί εξήγηση της δυναμικής, την οποία σκοπεύουμε να δείξουμε ότι δεν είναι αρκετή για να εξηγήσει τα δεδομένα μας. Η στατιστική διαχωρισμού είναι ένας αριθμός που ποσοτικοποιεί κάποιες πληροφορίες της χρονοσειράς. Εάν ο αριθμός είναι διαφορετικός από αυτόν που αναμένεται όταν ισχύει η μηδενική υπόθεση, τότε η μηδενική υπόθεση μπορεί να απορριφθεί.

Τα δεδομένα αντικατάστασης παράγονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε αυτά να έχουν μερικές ιδιότητες ίδιες με αυτές της πραγματικής χρονοσειράς (όπως η μέση τιμή, η διασπορά, ο μετασχηματισμός Fourier), αλλά να είναι κατά τα άλλα τυχαία, όπως προσδιορίζεται από τη μηδενική υπόθεση. Για κάθε σύνολο δεδομένων αντικατάστασης, υπολογίζεται η στατιστική διάκρισης και από τη συλλογή αυτών προσεγγίζεται η κατανομή τους.

Αν και η μέθοδος αυτή μπορεί να απαιτήσει αρκετούς υπολογισμούς, οδηγεί σε αυξημένη ευελιξία στην επιλογή μηδενικών υποθέσεων και στατιστικών διαχωρισμού. Μάλιστα η μηδενική υπόθεση και η στατιστική διαχωρισμού μπορούν να επιλεγούν ανεξάρτητα η μία από την άλλη. Η μέθοδος των δεδομένων αντικατάστασης αποτελούν βασικά μια εφαρμογή των bootstrap μεθόδων της μοντέρνας στατιστικής.

6.2.1 Υπολογισμός σημαντικότητας

Εστω $Q_D = \mu_D$ η στατιστική που υπολογίζεται για την πραγματική χρονοσειρά και Q_{H_i} η στατιστική που αντιστοιχεί στο i -οστό σύνολο δεδομένων αντικατάστασης. Έστω επίσης μ_H και σ_H η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση, αντίστοιχα, της κατανομής των Q_H .

Εάν είναι διαθέσιμες πολλές πραγματοποιήσεις των παρατηρούμενων δεδομένων, τότε είναι δυνατή η απευθείας σύγκριση των δύο κατανομών (παρατηρούμενων και δεδομένων αντικατάστασης), χρησιμοποιώντας για παράδειγμα το Kolmogorov-Smirnov ή το Mann-Whitney τεστ, τα οποία συγκρίνουν τις πλήρεις κατανομές ή το t -τεστ το οποίο συγκρίνει μόνο τις μέσες τιμές. Εάν είναι διαθέσιμο ένα μόνο σύνολο παρατηρούμενων δεδομένων, τότε ορίζουμε το μέγεθος 'σημαντικότητας' ως τη διαφορά μεταξύ της πραγματικής και της μέσης τιμής των δεδομένων αντικατάστασης, διαιρεμένη με την τυπική απόκλιση των δεδομένων αντικατάστασης:

$$S = \frac{|Q_D - \mu_H|}{\sigma_H} \quad (6.1)$$

Εάν η στατιστική ακολουθεί γκαουσιανή κατανομή (και τα αριθμητικά πειράματα δείχνουν ότι αυτή είναι λογική προσέγγιση), τότε η p -τιμή δίνεται από τη σχέση $p = \text{erfc}(S/\sqrt{2})$. Αυτή εκφράζει την πιθανότητα να παρατηρηθεί σημαντικότητα S ή μεγαλύτερη εάν η μηδενική υπόθεση είναι αληθής.

Υποθέτοντας ότι οι στατιστικές ακολουθούν γκαουσιανή κατανομή μπορεί να υπολογιστούν

τα σφάλματα ΔS με τη μέθοδο διάδοσης των σφαλμάτων:

$$\left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 = \left(\frac{\Delta |\mu_H - \mu_D|}{|\mu_H - \mu_D|}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \sigma_H}{\sigma_H}\right)^2 = \frac{(\Delta \mu_H)^2 + (\Delta \mu_D)^2}{(\mu_H - \mu_D)^2} + \left(\frac{\Delta \sigma_H}{\sigma_H}\right)^2 \quad (6.2)$$

Το σφάλμα της μέσης τιμής που βασίζεται σε N παρατηρήσεις δίνεται από τη σχέση $(\Delta \mu)^2 = \sigma^2/N$ και το σφάλμα της τυπικής απόκλισης από τη σχέση $(\Delta \sigma)^2 = \sigma^2/2N$. Έτσι καταλήγουμε ότι

$$\left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 = \frac{\sigma_H^2/N_H + \sigma_D^2/N_D}{(\mu_H - \mu_D)^2} + \frac{1}{2N_H} \quad (6.3)$$

Η απόλυτη τιμή του σφάλματος είναι:

$$\Delta S = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}S^2\right)/N_H + (\sigma_D/\sigma_H)^2/N_D} \quad (6.4)$$

Όταν είναι διαθέσιμη μόνο μια πραγματοποίηση της χρονοσειράς, τότε $\sigma_D = 0$ και αγνοείται ο δεύτερος όρος στην παραπάνω εξίσωση.

6.2.2 Ιεραρχία μηδενικών υποθέσεων

Η μηδενική υπόθεση ορίζει τη φύση της υποψήφιας διαδικασίας, η οποία ίσως εξηγεί αρκετά, ίσως όχι, τα δεδομένα. Οι μηδενικές υποθέσεις συνήθως προσδιορίζουν ότι διατηρούνται συγκεκριμένες ιδιότητες της πραγματικής χρονοσειράς, όπως η μέση τιμή και η διασπορά, αλλά δεν υπάρχει επιπλέον δομή στη χρονοσειρά. Τα δεδομένα αντικατάστασης παράγονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μιμούνται τα διατηρούμενα χαρακτηριστικά, αλλά εν γένει να είναι τυχαία. Υπάρχει κάποιο εύρος στην επιλογή των χαρακτηριστικών που θα πρέπει να διατηρούνται: φυσικά η μέση τιμή, η διασπορά και πιθανώς επίσης η φασματική ισχύς. Εάν τα πειραματικά δεδομένα διακριτοποιούνται σε ακέραιες τιμές, τότε και τα δεδομένα αντικατάστασης πρέπει να διακριτοποιούνται παρομοίως.

Γραμμικός αυτοσυσχετιζόμενος γκαουσιανός θόρυβος

Το μοντέλο περιγράφεται από τους συντελεστές α_k και τη διασποράς σ της διαδικασίας:

$$x(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^q \alpha_k x(t-k) + \sigma e(t)$$

που μιμείται την αρχική χρονοσειρά ως προς τη μέση τιμή, τη διασπορά και τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για καθυστερήσεις $\tau = 1, \dots, q$. Η $e(t)$ είναι ασυσχέτιστος γκαουσιανός θόρυβος με μοναδιαία διασπορά. Η προηγούμενη εξίσωση αποτελεί ένα αυτοπαλινδρούμενο μοντέλο (AR). Το γενικότερο μοντέλο περιλαμβάνει επίσης ένα MA μοντέλο χρονικά ολισθημένων όρων θορύβων και έτσι ο συνδυασμός δίνει ένα ARMA μοντέλο. Για αρκετά μεγάλο q , τα μοντέλα γίνονται ισοδύναμα. Στην περίπτωση αυτή η μηδενική υπόθεση είναι ότι η δομή της χρονοσειράς περιγράφεται πλήρως από τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ή ισοδύναμα από τη φασματική ισχύ Fourier.

Στατικός μη γραμμικός μετασχηματισμός γραμμικού γκαουσιανού θορύβου

Ένας τρόπος γενίκευσης της προηγούμενης μηδενικής υπόθεσης για περιπτώσεις όπου τα δεδομένα είναι μη γκαουσιανά είναι να υποθέσει κανείς ότι, αν και η δυναμική είναι γραμμική, η συνάρτηση παρατήρησης είναι μη γραμμική. Συγκεκριμένα, μπορεί να υποθέσει κανείς ότι υπάρχει μια

υποκείμενη χρονοσειρά $\{y(t)\}$ σε συμφωνία με τη μηδενική υπόθεση του γραμμικού γκαουσιανού θορύβου και μια παρατηρούμενη χρονοσειρά $\{x(t)\}$ που συνδέονται μέσω της σχέσης

$$x(t) = h(y(t)) \quad (6.5)$$

Αφού η $x(t)$ εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή του $y(t)$ και όχι από τις παραγώγους ή προηγούμενες τιμές, το φίλτρο $h(\cdot)$ θεωρείται στατικό. Για να επιτραπεί η δημιουργία δεδομένων αντικατάστασης, πρέπει επιπλέον να θεωρήσουμε στη μηδενική υπόθεση ότι η συνάρτηση παρατήρησης $h(\cdot)$ είναι στην πράξη αντιστρέψιμη.

Τονίζεται ότι οι χρονοσειρές είναι αυστηρά μιλώντας μη γραμμικές, αλλά η μη γραμμικότητα δεν είναι στη δυναμική. Οι περισσότεροι συμβατικοί έλεγχοι μη γραμμικότητας θα κατέληγαν σωστά στο συμπέρασμα ότι η χρονοσειρά είναι μη γραμμική, αλλά δε θα διέκριναν εάν η μη γραμμικότητα οφείλεται στη δυναμική ή στην κατανομή των πλατών. Χρησιμοποιώντας δεδομένα αντικατάστασης προσαρμοσμένα στη συγκεκριμένη μηδενική υπόθεση, γίνεται δυνατός ο λεπτός αυτός διαχωρισμός σχετικά με τη φύση της δυναμικής.

Συνεχίζοντας, θα μπορούσε να επεκτείνει κανείς τη μηδενική υπόθεση σε περισσότερο γενικές περιπτώσεις. Για παράδειγμα, υπάρχει μια μεγάλη τάξη μη γραμμικών στοχαστικών διαδικασιών, οι οποίες δεν είναι προβλέψιμες ακόμη και ως προς τη μέση τιμή. Μεταξύ τους συγκαταλλέγονται και τα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικά μοντέλα, σύμφωνα με τα οποία η διασπορά εξαρτάται από το παρελθόν, αλλά όχι η μέση τιμή. Αν και υπάρχει σίγουρα μη γραμμικό περιεχόμενο σε αυτές τις χρονοσειρές, δεν εκδηλώνεται σε αύξηση της προβλεψιμότητας από μη γραμμικά μοντέλα.

6.2.3 Στατιστικές διαχωρισμού

Η μέθοδος των δεδομένων αντικατάστασης μπορεί εν γένει να χρησιμοποιηθεί με οποιαδήποτε στατιστική διαχωρισμού. Τυπικά το μόνο που απαιτείται για την απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης είναι η στατιστική να παρουσιάζει διαφορετική κατανομή για τα δεδομένα από αυτή των δεδομένων αντικατάστασης. Φυσικά, η μέθοδος είναι η περισσότερο χρήσιμη εάν η στατιστική παράγει πραγματικά μια καλή εκτίμηση μιας ποσότητας με μεγάλο φυσικό ενδιαφέρον. Στην περίπτωση αυτή, όχι μόνο θα προέκυπτε (εάν προέκυπτε) η απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης, αλλά θα υπήρχε και ένας άτυπος χαρακτηρισμός της φύσης της μη γραμμικότητας.

Επειδή εν γένει ενδιαφερόμαστε για την ανίχνευση της πιθανότητας ότι η υποκείμενη δυναμική είναι χαοτική, επιλογές για τη στατιστική διαχωρισμού είναι η διάσταση συσχετισμού και οι εκθέτες Lyapunov καθώς και το σφάλμα πρόβλεψης. Το ενδιαφέρον τους έγκειται στο ότι, ιδανικά, η διάσταση μετρά τους βαθμούς ελευθερίας, ο εκθέτης Lyapunov δηλώνει την εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες και το σφάλμα πρόβλεψης ελέγχει το ντετερμινισμό. Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί το ολοκλήρωμα συσχετισμού (δηλαδή το $C(r)$ για κάποιες τιμές του r), ωστόσο είναι λιγότερο χρήσιμο ως ένα άτυπο εργαλείο. Σημειώνεται ότι ο κίνδυνος στη χρησιμοποίηση μιας ομάδας στατιστικών είναι ότι μια από αυτές μπορεί τυχαία να εμφανιστεί σημαντική. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί τυπικά να αντισταθμιστεί με τη διατήρηση αυστηρής μέτρησης του πλήθους των χρησιμοποιούμενων ελέγχων και την αύξηση του κατωφλίου σημαντικότητας, αντίστοιχα. Η τυπική προσέγγιση τείνει να γίνεται περισσότερο συντηρητική από ό,τι είναι απαραίτητο, αφού οι έλεγχοι δεν είναι στην πραγματικότητα ανεξάρτητοι μεταξύ τους, αλλά στην πράξη συνιστάται η διατήρηση ενός ευλόγως υψηλού κατωφλίου σημαντικότητας.

6.3 Αλγόριθμοι παραγωγής δεδομένων αντικατάστασης

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τρεις αλγόριθμοι παραγωγής δεδομένων αντικατάστασης [127]. Οι δύο πρώτοι υλοποιούν την υπόθεση του γραμμικά συσχετισμένου θορύβου και ο τρίτος το στατικό μη γραμμικό μετασχηματισμό.

6.3.1 Αλγόριθμος FT χωρίς τη χρήση παραθύρου

Ο αλγόριθμος αυτός βασίζεται στη μηδενική υπόθεση ότι τα δεδομένα προέρχονται από μια γραμμική γκαουσιανή διαδικασία. Τα δεδομένα αντικατάστασης παράγονται έτσι ώστε να έχουν το ίδιο φάσμα Fourier με τα πραγματικά δεδομένα. Ο αλγόριθμος έχει ως εξής:

Πρώτα υπολογίζεται ο μετασχηματισμός Fourier για θετικές και αρνητικές συχνότητες $f = 0, 1/N, 2/N, \dots, 1/2$ και χωρίς χρήση παραθύρου. Παρόλο που το παράθυρο γενικά συνιστάται όταν το κύριο ενδιαφέρον υπάρχει στη φασματική ισχύ, καταρχήν μπορούμε να μην χρησιμοποιούμε παράθυρο γιατί αυτό που θέλουμε είναι τα πραγματικά δεδομένα και τα δεδομένα αντικατάστασης να έχουν την ίδια φασματική ισχύ. Ο μετασχηματισμός Fourier είναι μιγαδικός σε κάθε συχνότητα. Για να τυχαιοποιήσουμε τις φάσεις, πολλαπλασιάζουμε κάθε μιγαδικό πλάτος με $e^{j\phi}$ όπου οι φάσεις ϕ επιλέγονται ομοιόμορφα στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Για να είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier πραγματικός, συμμετροποιούμε τις φάσεις έτσι ώστε $\phi(f) = -\phi(-f)$. Τέλος, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier παρέχει τα δεδομένα αντικατάστασης.

Ένας από τους περιορισμούς του αλγορίθμου είναι ότι δεν αναπαράγει καθαρές συχνότητες πολύ καλά. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι οι γειτονικές συχνότητες στο χώρο Fourier επιμολύνονται και στη συνέχεια επειδή οι φάσεις τους τυχαιοποιούνται, καταλήγουν στο να ανταγωνίζονται μεταξύ τους και να παράγουν αναληθώς χαμηλές συχνότητες. Αυτό μπορεί να μην είναι τόσο σημαντικό, αφού είναι δύσκολη η δημιουργία μιας απλής στοχαστικής διαδικασίας με μεγάλους σύμφωνους χρόνους. Με άλλα λόγια, οι χρονοσειρές όχι μόνο θα πρέπει να είναι αρκετά μεγαλύτερες από τις κύριες περιοδικότητες, αλλά επίσης πολύ μακρύτερες από το χρόνο συμφωνίας οποιασδήποτε δεδομένης συχνότητας.

Ένα δεύτερο πρόβλημα που είναι περισσότερο εμφανές για υψηλά δειγματοληπτημένα συνεχή δεδομένα, είναι ότι μπορεί να εισαχθούν ανακριβώς υψηλές συχνότητες. Αυτό προκύπτει ως απόρροια του μετασχηματισμού Fourier, ο οποίος υποθέτει ότι οι χρονοσειρές είναι περιοδικές με περίοδο N και συμβαίνει όταν υπάρχει ασυνέχεια μεταξύ του πρώτου και του τελευταίου σημείου. Στην περίπτωση αυτή συνιστάται η ψαλλίδιση του μήκους της χρονοσειράς έτσι ώστε $x(0) \simeq x(N-1)$. Η ψαλλίδιση αυτή δεν αποτελεί πρόβλημα εάν η χρονοσειρά είναι στατική και έχει μήκος μεγαλύτερο από την κυρίαρχη περιοδικότητα.

6.3.2 Αλγόριθμος FT με τη χρήση παραθύρου

Το πρόβλημα των ανακριβών υψηλών συχνοτήτων μπορεί να αντιμετωπιστεί επίσης με τη χρήση παραθύρου πριν από το μετασχηματισμό Fourier. Η χρονοσειρά πολλαπλασιάζεται με μια συνάρτηση $w(t) = \sin \frac{\pi t}{N}$, η οποία μηδενίζεται στα ακραία σημεία $t = 0$ και $t = N$. Η χρήση του παραθύρου αυτού αμβλύνει την ασυνέχεια μεταξύ πρώτου και τελευταίου δείγματος και φαίνεται να απαλλάσσει αποτελεσματικά από την επίδραση των υψηλών συχνοτήτων. Ωστόσο, παράγει επίσης μια ανακριβή χαμηλή συχνότητα από τη φασματική ισχύ του ίδιου του $w(t)$. Η λύση είναι ο μηδενισμός του πλάτους της παρασιτικής συχνότητας $f = \frac{1}{N}$. Ωστόσο, υπάρχει ο κίνδυνος της υπαρξης σημαντικής ισχύος στη συχνότητα αυτή στα αρχικά πραγματικά δεδομένα.

6.3.3 Αλγόριθμος Fourier με τροποποίηση πλατών

Ο αλγόριθμος αυτός παράγει σύνολα δεδομένων αντικατάστασης που σχετίζονται με τη μηδενική υπόθεση ότι η παρατηρούμενη χρονοσειρά είναι ένας μονότονος μη γραμμικός μετασχηματισμός μιας γραμμικής γκαουσιανής διαδικασίας. Η ιδέα συνίσταται στην αλλαγή κλίμακας των τιμών των αρχικών χρονοσειρών έτσι ώστε να γίνουν γκαουσιανές. Στη συνέχεια χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος FT με παράθυρο για την παραγωγή χρονοσειρών αντικατάστασης που έχουν το ίδιο φάσμα Fourier με τα δεδομένα που προέκυψαν από την αλλαγή κλίμακας. Τέλος, γίνεται αντίστροφη

αλλαγή κλίμακας στα γκαουσιανά δεδομένα αντικατάστασης ώστε να αποκτήσουν την κατανομή πλατών της αρχικής χρονοσειράς.

Πιο συγκεκριμένα, έστω $x(t)$, $t = 0, \dots, N - 1$ η αρχική χρονοσειρά. Το πρώτο βήμα είναι η δημιουργία μιας γκαουσιανής χρονοσειράς $y(t)$, στην οποία κάθε στοιχείο παράγεται ανεξάρτητα από μια γκαουσιανή ψευδοτυχαία γεννήτρια. Στη συνέχεια επαναδιατάσσουμε τη χρονική ακολουθία της γκαουσιανής χρονοσειράς έτσι ώστε να συμφωνούν οι σειρές και των δύο χρονοσειρών. Δηλαδή, εάν $x(t)$ είναι η n -οστή μικρότερη τιμή από όλα τα x , τότε το $y(t)$ θα είναι η n -οστή μικρότερη από όλα τα y . Επομένως, τα επαναδιατεταγμένα $y(t)$ αποτελούν τη χρονοσειρά που παρακολουθεί την αρχική χρονοσειρά $x(t)$ και επιπλέον έχει γκαουσιανή κατανομή πλατών. Χρησιμοποιώντας τον FT ή τον FT αλγόριθμο με παράθυρο, παράγουμε μια σειρά αντικατάστασης $y'(t)$ της γκαουσιανής χρονοσειράς. Εάν η αρχική χρονοσειρά $x(t)$ επαναδιαταχθεί χρονικά έτσι ώστε να ακολουθήσει την $y'(t)$ με την έννοια ότι συμφωνούν οι σειρές τους, τότε η χρονικά επαναδιατεταγμένη χρονοσειρά παρέχει μια σειρά δεδομένων αντικατάστασης της αρχικής χρονοσειράς με την ίδια κατανομή πλατών. Επιπλέον, οι υποκείμενες χρονοσειρές $y(t)$ και $y'(t)$ είναι γκαουσιανές και έχουν το ίδιο φάσμα Fourier.

Κεφάλαιο 7

Ανάλυση Εγκεφαλογραφήματος

7.1 Γενικά

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων ετών λαμβάνει χώρα μια σημαντική ερευνητική προσπάθεια με αντικείμενο την εφαρμογή των τεχνικών της μη γραμμικής ανάλυσης στο ηλεκτροεγκεφαλογράφημα. Από την προσπάθεια αυτή προκύπτει ότι οι τεχνικές αυτές παρέχουν πρόσθετες πληροφορίες που αλλιώς δεν θα μπορούσαν να εξαχθούν. Τα μη γραμμικά μεγέθη, όπως η διάσταση συσχετισμού, οι εκθέτες Lyapunov και η εντροπία Kolmogorov, έχουν χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση διαφόρων φυσιολογικών καταστάσεων εγκεφαλογραφικής δραστηριότητας καθώς και καταστάσεων ασθενειών, οι οποίες ποικίλουν από συνήθεις εγρήγορσης και ύπνου μέχρι διάφορα βάθη αναισθησίας, σχιζοφρένεια και διάφορα επιληπτικά σύνδρομα [19],[34], [54], [58], [65], [66], [82], [97], [135]. Παράλληλα, η μέθοδος της ανάλυσης των δεδομένων αντικατάστασης με τυχαιοποιημένες φάσεις [127] έχει εφαρμοστεί στις ΗΕΓ καταγραφές με σκοπό τον έλεγχο της παρουσίας μη γραμμικότητας στο ΗΕΓ σήμα.

Οι μελέτες αυτές δείχνουν ότι η 'διάσταση' του ανθρωπίνου ΗΕΓ παρουσιάζει ένα μεγάλο εύρος τιμών που ποικίλουν μεταξύ 4 και 11 και καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι στην κατάσταση εγρήγορσης, η 'διάσταση' του ΗΕΓ είναι η υψηλότερη. Ωστόσο, μια ξαφνική και σημαντική πτώση της διάστασης προς μικρότερες τιμές παρατηρείται κατά τη διάρκεια καταστάσεων όπως ο ύπνος, η αναισθησία ή καταστάσεων στις οποίες ο εγκέφαλος παρουσιάζει μειωμένη ικανότητα επεξεργασίας πληροφορίας. Επιπλέον, πολλές από αυτές τις μελέτες καταλήγουν στο ότι η αρχική υπόθεση της γραμμικότητας απορρίπτεται για περιπτώσεις όπως οι ενδοκρανιακές ΗΕΓ καταγραφές κατά τη διάρκεια κρίσεων σε επιληπτικούς ασθενείς [18], [19], [66], [135]. Ωστόσο, τα ευρήματα από τις μελέτες καταγραφών του ανθρωπίνου ΗΕΓ παρουσιάζονται αρκετά ανόμοια. Ενώ, μερικές μελέτες υποστηρίζουν ότι η αρχική υπόθεση της γραμμικότητας δεν μπορεί να απορριφθεί ([130]), άλλοι ερευνητές ([93], [99], [103]) έχουν ανιχνεύσει στοιχεία που συνηγορούν υπέρ της ύπαρξης μη γραμμικότητας στο φυσιολογικό ΗΕΓ του ανθρώπου. Οι Stam et al. [118] κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι ο ανθρώπινος άλφα ρυθμός είναι μία ετερογενής οντότητα που αποτελείται από δύο τύπους εποχών. Ο τύπος I δεν μπορεί να διαχωριστεί από το φιλτραρισμένο θόρυβο, ενώ ο τύπος II παρουσιάζει μη γραμμική συμπεριφορά. Παρά τις αποκλίσεις, η πλειοψηφία των μελετών θεωρεί ότι τα μη γραμμικά μεγέθη αποτελούν ένα σύνολο πολύτιμων χαρακτηριστικών για την περιγραφή των ΗΕΓ καταγραφών πέρα από τα κλασικά γραμμικά μεγέθη.

Οι μελέτες σχετικά με το ΗΕΓ φυσιολογικών ([57], [80], [117]) δείχνουν ότι η διάσταση συσχετισμού είναι υψηλότερη στις εμπρόσθιες και κροταφικές περιοχές και χαμηλότερη στις ινιακές περιοχές. Σε μια πρώτη μελέτη που περιελάμβανε δεξιόχειρες φυσιολογικούς ([39]) προέκυψε ότι οι εκτιμήσεις της διάστασης συσχετισμού του ΗΕΓ από διάφορα ηλεκτρόδια παρουσιάζουν μεγάλο εύρος τιμών. Ωστόσο, παρά τις διακυμάνσεις αυτές, οι υψηλότερες τιμές παρουσιάζονται

συστηματικά στην αριστερή ινιακή περιοχή. Οι υψηλές αυτές τιμές της διάστασης συσχετισμού μπορεί να αντικατοπτρίζουν δραστηριότητα από τις υποκείμενες περιοχές τριτογενούς συσχέτισης, μια φλοιϊκή περιοχή που χαρακτηρίζεται από υψηλή λειτουργική τάξη. Η υπόθεση αυτή υπονοεί ότι, εάν η λειτουργική τάξη της φλοιϊκής οργάνωσης εκφράζεται στις διαφορές της διάστασης συσχετισμού, τότε οι εκτιμήσεις της διάστασης συσχετισμού θα ήταν ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στη μελέτη του ανθρώπινου ΗΕΓ κατά τη διάρκεια διαφόρων καταστάσεων καθώς και για την εξαγωγή σωματοτοπικών πληροφοριών από τις ΗΕΓ καταγραφές.

Η προσπάθειά μας εστιάστηκε στη μελέτη των διαφορών των μη γραμμικών και γραμμικών μεγεθών που αντιστοιχούν στις διάφορες απαγωγές και την εκμετάλλευση των διαφορών αυτών για το χαρακτηρισμό και την ταξινόμηση των ΗΕΓ καταγραφών [74]. Τα μη γραμμικά μεγέθη περιλαμβάνουν τη διάσταση συσχετισμού D_2 και το μέγεθος C_{r1} που χαρακτηρίζει το ολοκληρωμα συσχετισμού [18], [19], ενώ τα γραμμικά μεγέθη περιλαμβάνουν το λόγο της ισχύος της δραστηριότητας της άλφα ζώνης που περιέχεται στη συνολική ισχύ. Μελετήθηκαν τόσο οι απόλυτες διαστάσεις, δηλαδή οι απόλυτες τιμές των μεγεθών αυτών που λαμβάνονται για κάθε ΗΕΓ κανάλι, όσο και οι σχετικές διαστάσεις, δηλαδή οι διαφορές των μεγεθών αυτών μεταξύ των διαφόρων απαγωγών, έχοντας υπόψη ότι οι τελευταίες μπορεί να είναι πιο σημαντικές από τις πρώτες στην αντανάκλαση των διαφορών στην υποκείμενη οργάνωση των φλοιϊκών λειτουργιών. Με βάση την αποδεκτή σχέση μεταξύ της δεξιοχειρίας/αριστεροχειρίας και του κυρίαρχου ημισφαιρίου του εγκεφάλου, διακρίναμε τους συμμετέχοντες σε δύο ομάδες, οι οποίες αποτελούνται από τους δεξιόχειρες και τους αριστερόχειρες. Εντός κάθε ομάδας και για καθένα από τα τρία προαναφερθέντα μεγέθη, η προσπάθειά μας εστιάζεται στον καθορισμό των συνόλων που αποτελούνται από τα ζεύγη απαγωγών με στατιστικά σημαντικές διαφορές ως προς το υπό μελέτη μέγεθος. Τα σύνολα αυτά μας επιτρέπουν την διάταξη των ΗΕΓ απαγωγών και την αναζήτηση μορφών χαρακτηριστικών που μπορούν να χαρακτηρίζουν τις δύο ομάδες των συμμετεχόντων. Τα πρότυπα που προκύπτουν χρησιμοποιούνται στη συνέχεια για την ταξινόμηση των μεμονωμένων συμμετεχόντων σε μία από τις δύο κλάσεις. Στη συνέχεια συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της ταξινόμησης που λαμβάνουμε όταν εφαρμόζουμε τα τρία διαφορετικά υπό μελέτη μεγέθη. Τέλος, οι ΗΕΓ καταγραφές ελέγχονται με τη μέθοδο της ανάλυσης των δεδομένων αντικατάστασης ως προς την αρχική υπόθεση της γραμμικότητας, δηλαδή ότι τα ΗΕΓ σήματα δεν μπορούν να διαχωριστούν από το γραμμικό τυχαίο θόρυβο.

7.2 Υλικό και μέθοδος

7.2.1 Συμμετέχοντες και συλλογή δεδομένων

Μελετήθηκαν οι ΗΕΓ καταγραφές 25 υγιών εθελοντών (14 άνδρες και 11 γυναίκες) ηλικίας από 19 μέχρι 45 ετών (μ.ο. 26.2 ± 5.1 έτη) που δεν παρουσίαζαν κάποια νευρολογική ασθένεια, ούτε καν ημικρανίες, και δεν είχαν κάνει χρήση φαρμάκων ή κατανάλωση αλκοόλ. Όλοι οι συμμετέχοντες συναίνεσαν στη συμμετοχή τους στη μελέτη. Δεκαπέντε από τους συμμετέχοντες είναι δεξιόχειρες (9 άνδρες και 6 γυναίκες) και δέκα αριστερόχειρες (5 άνδρες και 5 γυναίκες). Σημειώνεται ότι λήφθηκε ιδιαίτερη μέριμνα ώστε να αποκλειστούν οι αμφίχειρες. Η ταξινόμηση δεξιοχειρίας/αριστεροχειρίας βασίστηκε στα αποτελέσματα 11 ελέγχων δεξιότητας [119], χέρι που χρησιμοποιείται για τις λεπτές και επιδέξιες κινητικές λειτουργίες και το οικογενειακό ιστορικό [25].

Όλες οι καταγραφές πραγματοποιήθηκαν στο Εργαστήριο Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας της Νευρολογικής Κλινικής του Αιγινιτείου Νοσοκομείου. Χρησιμοποιήθηκαν 19 ηλεκτρόδια χρυσού τοποθετημένα σύμφωνα με το διεθνές σύστημα 10 – 20 και ένα ηλεκτρόδιο αναφοράς στη θέση F_{pz} , όλα σταθεροποιημένα με την κρέμα Grass-EC2. Οι ΗΕΓ καταγραφές έγιναν από τον ψηφιακό εγκεφαλογράφο της Micromed BQ100S και αποθηκεύθηκαν σε σκληρό δίσκο. Τα χαρακτηρι-

στικά του εγκεφαλογράφου είναι: 8-bit αναλογοψηφιακή μετατροπή, δειγματοληψία 128Hz ανά κανάλι, φίλτρο διέλευσης $0.1 - 50\text{Hz}$. Όλες οι καταγραφές έγιναν ενώ οι συμμετέχοντες βρίσκονταν σε ένα ήσυχο δωμάτιο σε καθεστηκυία θέση, με τα μάτια κλειστά. Η καταγραφή για κάθε συμμετέχοντα είναι συνολικής διάρκειας 20 λεπτών και αποτελείται από 4 πεντάλεπτες περιόδους. Μεταξύ των πεντάλεπτων περιόδων καταγραφής πραγματοποιήθηκαν δίλεπτα διαλείμματα σε μια προσπάθεια ελαχιστοποίησης των πιθανών παραστίων λόγω κινήσεων των συμμετεχόντων καθώς και για να εξασφαλιστούν και διατηρηθούν σταθερά και συνεχή επίπεδα επαγρύπνησης.

Όλα τα τμήματα των καταγραφών που περιείχαν παράσιτα αναγνωρίστηκαν και απορρίφθηκαν από περαιτέρω επεξεργασία. Τα τμήματα που ήταν ελεύθερα παραστίων χωρίστηκαν σε εποχές 16 δευτερολέπτων μη επικαλυπτόμενες. Κάθε εποχή αποτελείται από 2048 δείγματα για κάθε ΗΕΓ κανάλι.

Η επεξεργασία των ΗΕΓ εποχών έγινε με βάση το πρωτόκολλο που παρουσιάζεται στον πίνακα 7.1.

Πίνακας 7.1: Πρωτόκολλο επεξεργασίας του ΗΕΓ σήματος

A.	Εφαρμογή του ελέγχου στατικότητας στις ΗΕΓ εποχές. Οι μη στατικές εποχές απορρίπτονται.
B.	Για κάθε στατική εποχή:
i)	Επιλογή της διάστασης εμβάπτισης και του χρόνου καθυστέρησης χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των εσφαλμένων γειτόνων και το πλαίσιο που βασίζεται στη γεωμετρία, αντίστοιχα.
ii)	Ανακατασκευή του φασικού χώρου.
iii)	Υπολογισμός της διάστασης συσχετισμού D_2 (χρησιμοποιώντας και τον εκτιμητή του Takens και τον εκτιμητή χορδής 'κανόνας των πέντε') και του C_{r1} .
iv)	Υπολογισμός της φασματικής ισχύος στην άλφα ζώνη, P_{alpha} , κανονικοποιημένη ως προς τη συνολική φασματική ισχύ.
v)	Παραγωγή 10 σειρών δεδομένων αντικατάστασης.
vi)	Για κάθε μία από τις σειρές των δεδομένων αντικατάστασης: Υπολογισμός της D_2 και του C_{r1} .
vii)	Εκτίμηση της σημαντικότητας των μεγεθών D_2 και C_{r1} της αρχικής χρονοσειράς.
Γ.	Για κάθε συμμετέχοντα:
i)	Υπολογισμός των μέσων τιμών των μεγεθών D_2 , C_{r1} και P_{alpha} για κάθε απαγωγή.
ii)	Προσδιορισμός των ζευγών των απαγωγών με στατιστικά σημαντικές διαφορές στα μεγέθη D_2 , C_{r1} και P_{alpha} με την εφαρμογή της one-way ANOVA.
Δ.	Για κάθε ομάδα:
i)	Προσδιορισμός των αντίστοιχων προτύπων ως προς τα μεγέθη D_2 , C_{r1} και P_{alpha} .
Ε.	Ταξινόμηση των συμμετεχόντων σε μία από τις δύο ομάδες σύμφωνα με τα πρότυπα που λαμβάνονται ως προς τα μεγέθη D_2 , C_{r1} και P_{alpha} .

Πριν από την κύρια ανάλυση πραγματοποιήθηκε σε κάθε εποχή έλεγχος στατικότητας με την ευρεία έννοια [12], ώστε να ελεγχθεί η ισχύς της υπόθεσης της στατικότητας των χρονοσειρών που απαιτείται από τους αλγορίθμους. Οι εποχές που χαρακτηρίστηκαν ως μη στατικές απορρίφθηκαν

από τη διαδικασία της περαιτέρω ανάλυσης. Οι στατικές εποχές ομαδοποιήθηκαν σε 15 σύνολα για κάθε συμμετέχοντα, κατά τέτοιο τρόπο ώστε κάθε σύνολο περιείχε τις εποχές που αντιστοιχούσαν στις διάφορες απαγωγές, ενώ όλες οι εποχές εντός του ίδιου συνόλου είναι ευθυγραμμισμένες στο χρόνο (ίδια στιγμή έναρξης, ίδια διάρκεια).

7.2.2 Ανακατασκευή του φασικού χώρου

Το πρώτο στάδιο της επεξεργασίας περιλαμβάνει την ανακατασκευή του φασικού χώρου από τα πειραματικά δεδομένα $x(t)$, $t = 1, \dots, N$. Κάθε σημείο X_i του ανακατασκευασμένου φασικού χώρου περιγράφεται από ένα m -διάστατο διάνυσμα της μορφής

$$X_i = [x(t) \quad X(t + \tau) \quad \dots \quad x(t + (m - 1)\tau)] , i = 1, \dots, N_m \quad (7.1)$$

όπου με m συμβολίζεται η διάσταση εμβάπτισης, με τ ο χρόνος καθυστέρησης και με N_m το πλήθος των σημείων του φασικού χώρου ($N_m = N - (m - 1)\tau$). Η παράμετρος m προσδιορίζεται από τη μέθοδο εσφαλμένων πλησιέστερων γειτόνων. Εφόσον η πλειοψηφία των εποχών έδωσαν τιμή για τη διάσταση εμβάπτισης $m = 11$, η τιμή αυτή χρησιμοποιήθηκε για την περαιτέρω ανάλυση. Η παράμετρος τ καθορίστηκε με βάση τη μέθοδο των Rosenstein et al. [105].

7.2.3 Υπολογισμός των μη γραμμικών μεγεθών D_2 και C_{r1}

Το επόμενο βήμα περιλαμβάνει τον υπολογισμό της συνάρτησης συσχετισμού:

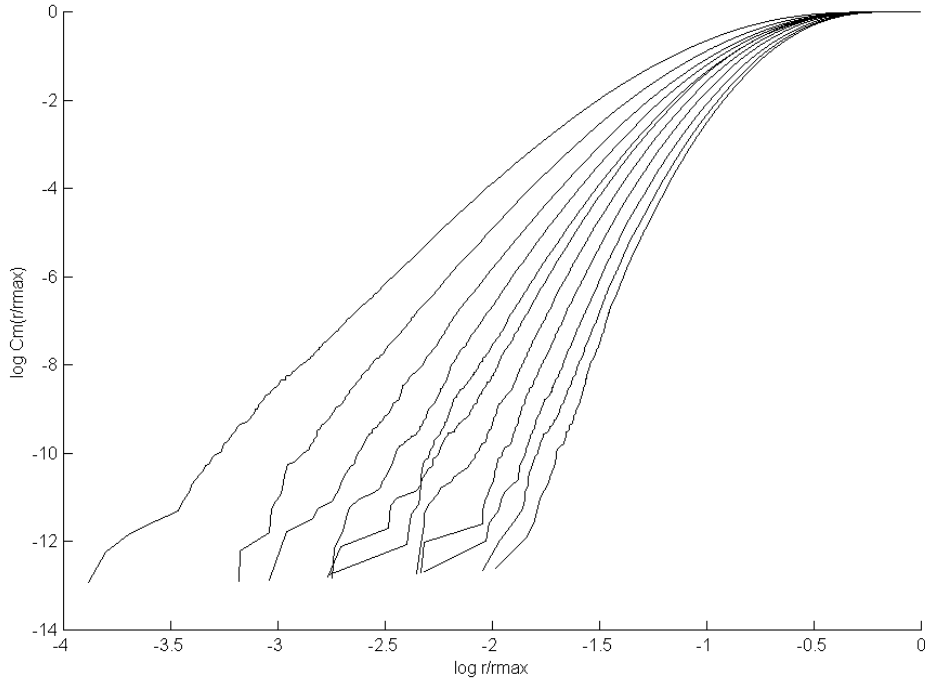
$$C_m(r) = \frac{2}{N_m(N_m - 1 - w)} \sum_{i=1}^{N_m} \sum_{j=i+w}^{N_m} H(r - |X_i - X_j|) \quad (7.2)$$

όπου $H(r)$ είναι η συνάρτηση Heaviside $\left(H(r) = \begin{cases} 1, & r \geq 0 \\ 0, & r < 0 \end{cases}\right)$, $|\cdot|$ η Ευκλείδεια απόσταση και η παράμετρος w αντιπροσωπεύει τη διόρθωση του Theiler [126]. Το w προσδιορίστηκε ως το πρώτο ελάχιστο της συνάρτησης αμοιβαίας πληροφορίας. Για αρκετά μικρό r , ο λογάριθμος της $C_m(r)$ είναι γραμμική συνάρτηση του λογαρίθμου του r :

$$\log C_m(r) \propto D_2 \log r \quad (7.3)$$

Η σταθερά της προηγούμενης γραμμικής σχέσης αποτελεί τη διάσταση συσχετισμού D_2 . Το Σχήμα 7.1 παρουσιάζει τη συνάρτηση συσχετισμού που αντιστοιχεί σε μια εποχή ενός δεξιόχειρα για ένα σύνολο 11 διαστάσεων εμβάπτισης. Λόγω του πεπερασμένου πλήθους των σημείων και της παρουσίας θορύβου, οι καμπύλες δεν είναι παντού γραμμικές. Χρησιμοποιήσαμε δύο διαφορετικούς εκτιμητές της D_2 . Ο πρώτος είναι ο εκτιμητής χορδής που είναι γνωστός ως 'κανόνας των πέντε' [129], ενώ ο δεύτερος είναι ο εκτιμητής του Takens [122]. Και οι δύο χρησιμοποιούν την παράμετρο του ανωτάτου ορίου απόστασης αποκοπής R_0 , το οποίο καθορίζεται ως $R_0 = 0.1 \cdot r_{max}$, όπου r_{max} είναι η μέγιστη μετρούμενη απόσταση μεταξύ δύο σημείων της τροχιάς (η διάμετρος του ελκυστή). Η εγκυρότητα της D_2 ελέγχεται με τον τύπο των Eckmann και Ruelle [29], ο οποίος καθορίζει τη μέγιστη έγκυρη τιμή που μπορεί να προκύψει από ένα σύνολο δεδομένων.

Το εναλλακτικό μη γραμμικό μέγεθος C_{r1} με το οποίο αποφεύγεται η οριοθεσία της γραμμικής περιοχής υπολογίζεται ως $C_{r1} = C_m(r = 0.1 \cdot r_{max})$ [18], [19].



Σχήμα 7.1: Η συνάρτηση συσχετισμού $C_m(r)$ σε $\log - \log$ κλίμακα μιας εποχής που αντιστοιχεί στο ηλεκτροδίο C_z του δεξιόχειρα Σ.Φ. για διαστάσεις εμβάπτισης $m = 5 - 15$.

7.2.4 Υπολογισμός του γραμμικού μεγέθους P_{alpha}

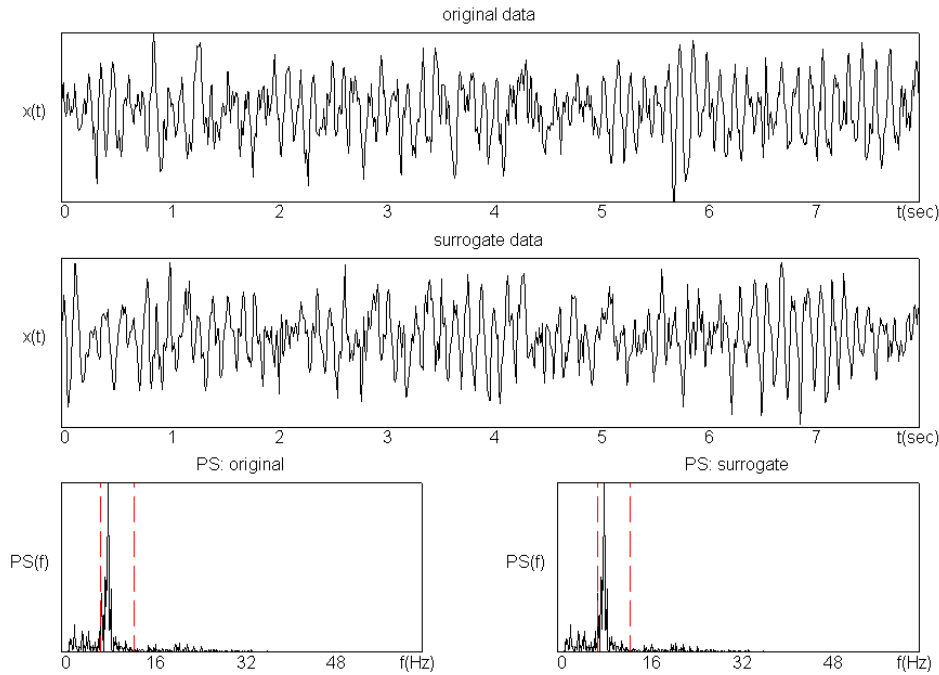
Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη φασματική ισχύ P_{alpha} που αντιστοιχεί στην άλφα ζώνη ($8 - 13\text{Hz}$) κανονικοποιημένη ως προς τη συνολική ισχύ:

$$P_{alpha} = \frac{\int_8^{13} |X(f)|^2 df}{\int_{0.1}^{50} |X(f)|^2 df} \quad (7.4)$$

όπου το $X(f)$ αποτελεί τον FFT μετασχηματισμό του σήματος $x(t)$.

7.2.5 Παραγωγή των δεδομένων αντικατάστασης

Τα σύνολα των δεδομένων αντικατάστασης παράγονται σύμφωνα με την FT μέθοδο που πρότειναν οι Theiler et al. [127] και περιγράφηκε στην ενότητα 6.3.2. Πρώτα, επιβεβαιώνουμε ότι η κατανομή των πλατών των χρονοσειρών είναι γκαουσιανή. Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε τη διαδικασία τελικών σημείων [130] ώστε να ακυρώσουμε τις επιδράσεις των ασυνεχειών που παρατηρούνται στα άκρα και οι οποίες αναδεικνύονται όταν εφαρμοστεί ο μετασχηματισμός Fourier σε χρονοσειρές με μεγάλους χρόνους συνοχής [128]. Ακολουθεί ο υπολογισμός του FFT της αρχικής χρονοσειράς. Στη συνέχεια, διατηρώντας τα πλάτη του FFT, μεταβάλλουμε τις φάσεις του με τυχαίο τρόπο. Η κατανομή των τυχαίων φάσεων είναι ομοιόμορφη στο $[0, 2\pi)$. Η τυχαιοποίηση υλοποιείται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλιστεί ότι ο αντίστροφος FFT είναι πραγματικός ($\arg(\omega) = -\arg(-\omega)$). Τέλος, υπολογίζοντας τον αντίστροφο FFT και εφαρμόζοντας την αντιστροφή της διαδικασίας τελικών σημείων παίρνουμε μία χρονοσειρά δεδομένων αντικατάστασης. Συνεπώς, από κατασκευής οι σειρές των δεδομένων αντικατάστασης έχουν την ίδια φασματική ισχύ με την αρχική χρονοσειρά, ωστόσο υπάρχει απώλεια των πληροφοριών που περιέχονται στις φάσεις. Το Σχήμα 7.2 παρουσιάζει ένα τμήμα μιας αρχικής χρονοσειράς καθώς και το αντίστοιχο τμήμα από μία από τις σειρές αντικατάστασής του. Παρουσιάζεται επίσης η φασματική ισχύς τόσο της αρχικής χρονοσειράς όσο και της σειράς δεδομένων αντικατάστασης.



Σχήμα 7.2: α) Τμήμα διάρκειας 8sec μιας αρχικής χρονοσειράς που αντιστοιχεί στο ηλεκτρόδιο C_z του δεξιόχειρα Σ.Φ. β) Μία σειρά δεδομένων αντικατάστασης που αντιστοιχεί στο σήμα του σχήματος α. γ) Η φασματική ισχύς του αρχικού σήματος α. δ) Η φασματική ισχύς της σειράς δεδομένων αντικατάστασης του β. Οι κατακόρυφες εστιγμένες γραμμές ορίζουν την άλφα ζώνη.

Η παραπάνω διαδικασία τυχαιοποίησης επαναλαμβάνεται 10 φορές και έτσι προκύπτει μια συλλογή 10 σειρών δεδομένων αντικατάστασης που αντιστοιχούν στην αρχική χρονοσειρά. Για κάθε μέλος της συλλογής υπολογίζονται τα μη γραμμικά μεγέθη D_2 και C_{r1} . Έστω με \bar{D}_2 και σ_{D_2} συμβολίζουμε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της διάστασης συσχετισμού της συλλογής, αντίστοιχα. Η σημαντικότητα της διάστασης συσχετισμού D_2 της αρχικής χρονοσειράς [127] υπολογίζεται ως

$$s = \frac{|D_2 - \bar{D}_2|}{\sigma_{D_2}} \quad (7.5)$$

Εάν $s > 1.96$ (επίπεδο σημαντικότητας $p < 0.05$), η τιμή της διάστασης συσχετισμού D_2 θεωρείται στατιστικά σημαντική και η αρχική υπόθεση της γραμμικότητας απορρίπτεται. Εφόσον, έχει ήδη ελεγχθεί η στατικότητα της χρονοσειράς, η απόρριψη υπονοεί ότι η υποκείμενη δυναμική είναι μη γραμμική. Διαφορετικά, η αρχική χρονοσειρά δεν μπορεί να διαχωριστεί από τον τυχαίο θόρυβο που περιγράφεται από ένα γραμμικό AR μοντέλο. Για τον υπολογισμό της σημαντικότητας του μη γραμμικού μεγέθους C_{r1} χρησιμοποιείται μία έκφραση παρόμοια με την (7.5).

7.2.6 Ανάλυση διασπορών ANOVA

Ως αποτέλεσμα των παραπάνω υπολογισμών προκύπτουν τρία σύνολα δεδομένων (ένα για καθένα από τα μεγέθη D_2 , C_{r1} και P_{alpha} για καθένα από τους συμμετέχοντες). Υποθέτοντας ότι μόνο η θέση των απαγωγών χρησιμοποιείται για την ταξινόμηση των τιμών κάθε συνόλου δεδομένων, εφαρμόζουμε την ANOVA ανάλυση για να ελέγξουμε την υπόθεση ότι οι μέσες τιμές που αντιστοιχούν στις διάφορες απαγωγές είναι ίσες. Η τεχνική αυτή εξετάζει τη διακύμανση των παρατηρήσεων κάθε απαγωγής καθώς και τη διακύμανση μεταξύ των μέσων όρων των απαγωγών. Πριν από την εφαρμογή της One-way ANOVA ελέγχουμε την ομογένεια των διακυμάνσεων με τη χρήση του τεστ του Levene. Ο προσδιορισμός της σημαντικότητας των διαφορών μεταξύ των

μέσων τιμών πραγματοποιείται με τη χρήση του Bonferroni τεστ. Το τεστ αυτό αποτελεί μια διαδικασία πολλαπλών συγκρίσεων που χρησιμοποιεί το t-τεστ για την εκτέλεση των συγκρίσεων ανά ζεύγος ($N_p = 19 \cdot 18/2 = 171$ ζεύγη) μεταξύ των μέσων των ομάδων και ταυτόχρονα ελέγχει το συνολικό ρυθμό σφαλμάτων θέτοντας το ρυθμό σφαλμάτων για κάθε τεστ ίσο με το πειραματικό ρυθμό σφαλμάτων διαιρεμένο με το συνολικό αριθμό των τεστ. Η ανάλυση ANOVA και το Bonferroni τεστ εφαρμόζεται για κάθε συμμετέχοντα.

Θεωρούμε τη σημαντικότητα κάθε ζεύγους απαγωγών ως χαρακτηριστικό του συμμετέχοντα στη μελέτη. Το τελικό αποτέλεσμα των Bonferroni τεστ κωδικοποιείται σε ένα N_p -διάστατο διάνυσμα S_k^g , η i -οστή συνιστώσα του οποίου $S_k^g(i)$ ισούται με 1 εάν το i -οστό ζεύγος είναι σημαντικό ή με 0 σε διαφορετική περίπτωση, όπου ο δείκτης $i = 1, 2, \dots, N_p$ απαριθμεί τα ζεύγη, ο δείκτης $g = 1, 2$ απαριθμεί τις ομάδες (δεξιόχειρες, αριστερόχειρες) και ο δείκτης $k = 1, 2, \dots, N_g$ απαριθμεί τα μέλη της g -οστής ομάδας ($N_1 = 15, N_2 = 10$). Έτσι, μετά την ολοκλήρωση της ανάλυσης ANOVA, παίρνουμε ως αποτέλεσμα 15 διανύσματα που αντιστοιχούν στα μέλη της πρώτης ομάδας (δεξιόχειρες) και 10 διανύσματα που αντιστοιχούν στα μέλη της δεύτερης ομάδας (αριστερόχειρες) για καθένα από τα τρία μεγέθη της μελέτης. Επιπλέον, κατασκευάζουμε τέσσερα ακόμη σύνολα από διανύσματα χαρακτηριστικών συνδυάζοντας τα τρία σύνολα διανυσμάτων που ήδη περιγράψαμε. Τα τρία νέα σύνολα των $2N_p$ -διάστατων διανυσμάτων προκύπτουν από το συνδυασμό των αρχικών διανυσμάτων ανά δύο, ενώ το τέταρτο σύνολο των $3N_p$ -διάστατων διανυσμάτων προκύπτει από το συνδυασμό όλων των αρχικών (και των τριών) διανυσμάτων.

7.2.7 Προσδιορισμός των προτύπων των κλάσεων

Στη συνέχεια προσδιορίζουμε τα πρότυπα κάθε κλάσης. Κάθε πρότυπο είναι ένα N_p -διάστατο διάνυσμα P^g , $g = 1, 2$, το οποίο ορίζεται λαμβάνοντας υπόψη τα διανύσματα χαρακτηριστικών S_k^g των μελών κάθε ομάδας. Κάθε συνιστώσα του P^g αντιστοιχεί σε ένα από τα N_p ζεύγη μεταξύ απαγωγών και η τιμή της τίθεται ίση με 1 ή 0 σύμφωνα με τον ακόλουθο ορισμό πλειοψηφίας:

$$P^g(i) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } \sum_{k=1}^{N_g} S_k^g(i) \geq 0.7 \cdot N_g \\ 0, & \text{εάν } \sum_{k=1}^{N_g} S_k^g(i) < 0.7 \cdot N_g \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N_p, g = 1, 2 \quad (7.6)$$

Το διάνυσμα P^1 δηλώνει το πρότυπο των δεξιόχειρων (κλάση 1), ενώ το διάνυσμα P^2 το πρότυπο των αριστερόχειρων (κλάση 2).

7.2.8 Ταξινόμηση των συμμετεχόντων

Κάθε συμμετέχοντας που χαρακτηρίζεται από ένα διάνυσμα χαρακτηριστικών S_k , $k = 1, 2, \dots, 25$ αντιστοιχίζεται σε μία από τις δύο κλάσεις σύμφωνα με το πρόσημο της διαφοράς:

$$d_k = |S_k - P^1| - |S_k - P^2| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_p} (S_k(i) - P^1(i))^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{N_p} (S_k(i) - P^2(i))^2} \quad (7.7)$$

Έτσι, εάν $d_k < 0$, τότε ο αντίστοιχος k -στός συμμετέχοντας ταξινομείται στην κλάση 1, διαφορετικά στην κλάση 2.

7.3 Αποτελέσματα

Ο Πίνακας 7.1 παρουσιάζει το πρωτόκολο που ακολουθήθηκε για τους υπολογισμούς. Οι εκτιμώμενες τιμές της διάστασης συσχετισμού των μεμονωμένων εποχών ποικίλουν σε ένα ευρύ πεδίο

τιμών για όλες τις απαγωγές. Η σημαντικότητα των διαφορών αυτών των τιμών μελετήθηκε και σε επίπεδο μεμονωμένων συμμετεχόντων και σε επίπεδο ομάδων (δεξιόχειρες - αριστερόχειρες). Πρώτα μελετήθηκε η εξάρτηση των εκτιμήσεων της διάστασης συσχετισμού σε επίπεδο συμμετεχόντων. Χρησιμοποιήθηκε η ANOVA ανάλυση για να ελέγξουμε εάν οι διαφορές στις μέσες τιμές των μελών κάθε ομάδας ήταν στατιστικά σημαντικές. Ο πίνακας 7.2 παρουσιάζει το πλήθος των ζευγών συμμετεχόντων με στατιστικά σημαντική διαφορά στα μεγέθη D_2 , C_{r1} και P_{alpha} για κάθε απαγωγή. Σημειώνεται ότι υπάρχουν 105 δυνατά ζεύγη μεταξύ δεξιόχειρων και 45 μεταξύ αριστερόχειρων.

Πίνακας 7.2: Πλήθος ζευγαριών των συμμετεχόντων με στατιστικά σημαντικές διαφορές ως προς τις τιμές των μεγεθών D_2 , C_{r1} και P_{alpha} για τους δεξιόχειρες και τους αριστερόχειρες

Δεξιόχειρες				Αριστερόχειρες			
Απαγωγή	D_2	C_{r1}	P_{alpha}	Απαγωγή	D_2	C_{r1}	P_{alpha}
F_{p1}	54/105	0/105	74/105	F_{p1}	0/45	0/45	31/45
F_{p2}	40/105	42/105	74/105	F_{p2}	0/45	18/45	31/45
F_7	61/105	42/105	84/105	F_7	5/45	18/45	36/45
F_3	47/105	11/105	63/105	F_3	0/45	5/45	27/45
F_z	54/105	0/105	74/105	F_z	0/45	0/45	31/45
F_4	56/105	0/105	74/105	F_4	18/45	0/45	31/45
F_8	47/105	11/105	74/105	F_8	31/45	5/45	31/45
T_3	63/105	42/105	84/105	T_3	0/45	18/45	36/45
C_3	58/105	21/105	74/105	C_3	5/45	9/45	31/45
C_z	58/105	21/105	63/105	C_z	5/45	9/45	27/45
C_4	56/105	53/105	63/105	C_4	9/45	23/45	27/45
T_4	35/105	0/105	63/105	T_4	18/45	0/45	27/45
T_5	49/105	42/105	105/105	T_5	23/45	18/45	45/45
P_3	56/105	42/105	84/105	P_3	31/45	18/45	36/45
P_z	61/105	63/105	74/105	P_z	31/45	27/45	31/45
P_4	82/105	32/105	63/105	P_4	14/45	14/45	27/45
T_6	65/105	21/105	95/105	T_6	18/45	9/45	41/45
O_1	77/105	42/105	105/105	O_1	27/45	18/45	45/45
O_2	82/105	32/105	84/105	O_2	27/45	14/45	36/45

Ο Πίνακας 7.3 περιέχει τις μέσες τιμές της διάστασης συσχετισμού (που λήφθηκαν χρησιμοποιώντας τον εκτιμητή χορδής με τον 'κανόνα των πέντε'), του C_{r1} και του P_{alpha} υπολογισμένες για όλα τα μέλη κάθε ομάδας.

Πίνακας 7.3: Μέσες τιμές των μεγεθών D_2 , C_{r1} και P_{alpha} για όλες τις απαγωγές των δεξιόχειρων και αριστερόχειρων.

Δεξιόχειρες				Αριστερόχειρες			
Απαγωγή	D_2	C_{r1}	P_{alpha}	Απαγωγή	D_2	C_{r1}	P_{alpha}
F_{p1}	5.96 ± 1.48	-1.48 ± 0.57	0.20 ± 0.09	F_{p1}	6.70 ± 0.56	-1.53 ± 0.55	0.16 ± 0.09
F_{p2}	6.23 ± 1.17	-1.49 ± 0.54	0.20 ± 0.09	F_{p2}	6.60 ± 0.56	-1.42 ± 0.56	0.15 ± 0.09
F_7	5.91 ± 1.91	-1.60 ± 0.48	0.24 ± 0.13	F_7	6.53 ± 0.72	-1.45 ± 0.49	0.19 ± 0.12
F_3	6.42 ± 1.17	-1.60 ± 0.51	0.22 ± 0.09	F_3	6.68 ± 0.54	-1.54 ± 0.53	0.20 ± 0.12
F_z	6.36 ± 1.07	-1.65 ± 0.54	0.21 ± 0.09	F_z	6.71 ± 0.48	-1.46 ± 0.52	0.20 ± 0.13
F_4	6.44 ± 1.11	-1.63 ± 0.54	0.22 ± 0.09	F_4	6.48 ± 0.76	-1.52 ± 0.52	0.20 ± 0.13
F_8	6.41 ± 1.45	-1.66 ± 0.51	0.24 ± 0.11	F_8	6.03 ± 1.76	-1.45 ± 0.56	0.17 ± 0.12
T_3	6.47 ± 1.10	-1.65 ± 0.49	0.23 ± 0.10	T_3	7.01 ± 0.63	-1.73 ± 0.54	0.19 ± 0.09
C_3	6.30 ± 0.96	-1.54 ± 0.56	0.23 ± 0.10	C_3	6.84 ± 0.59	-1.55 ± 0.57	0.21 ± 0.13
C_z	6.24 ± 1.11	-1.42 ± 0.53	0.22 ± 0.11	C_z	6.65 ± 0.52	-1.49 ± 0.58	0.22 ± 0.14
C_4	6.35 ± 0.99	-1.55 ± 0.54	0.23 ± 0.10	C_4	6.69 ± 0.52	-1.47 ± 0.52	0.22 ± 0.14
T_4	6.67 ± 0.86	-1.72 ± 0.52	0.24 ± 0.09	T_4	6.63 ± 0.76	-1.45 ± 0.53	0.18 ± 0.11
T_5	6.36 ± 0.97	-1.59 ± 0.46	0.24 ± 0.08	T_5	6.75 ± 0.68	-1.56 ± 0.60	0.20 ± 0.11
P_3	6.09 ± 1.08	-1.29 ± 0.49	0.24 ± 0.12	P_3	6.27 ± 1.04	-1.33 ± 0.56	0.24 ± 0.15
P_z	5.91 ± 1.08	-1.29 ± 0.57	0.24 ± 0.13	P_z	6.16 ± 0.87	-1.09 ± 0.57	0.25 ± 0.17
P_4	5.85 ± 1.19	-1.30 ± 0.51	0.25 ± 0.14	P_4	6.02 ± 0.78	-1.23 ± 0.47	0.23 ± 0.16
T_6	6.25 ± 1.10	-1.53 ± 0.47	0.26 ± 0.11	T_6	6.46 ± 0.74	-1.38 ± 0.44	0.20 ± 0.12
O_1	5.71 ± 0.94	-1.31 ± 0.41	0.25 ± 0.12	O_1	6.31 ± 0.90	-1.33 ± 0.54	0.23 ± 0.15
O_2	5.58 ± 1.08	-1.30 ± 0.45	0.25 ± 0.13	O_2	5.68 ± 1.00	-1.13 ± 0.37	0.23 ± 0.15

Ωστόσο, επειδή δεν μπορούν να εξαχθούν σαφή συμπεράσματα από τα αποτελέσματα αυτά, προχωρήσαμε στον έλεγχο σημαντικότητας των διαφορών των μέσων τιμών που παρατηρήσαμε σε ατομικό επίπεδο κάθε συμμετέχοντα, σύμφωνα με τη διαδικασία που περιγράφηκε προηγούμενα. Τα πρότυπα που προέκυψαν για τις δύο κλάσεις με βάση τις τιμές της διάστασης συσχετισμού D_2 παρουσιάζονται στους Πίνακες 7.4 και 7.5 για τους δεξιόχειρες (κλάση 1) και τους αριστερόχειρες (κλάση 2), αντίστοιχα. Ας σημειωθεί ότι παρουσιάζονται μόνο τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο λόγω της εγγενούς ιδιότητας της συμμετρίας και του γεγονότος ότι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου είναι ίσα με μηδέν.

Πίνακας 7.4: Πρότυπα δεξιόχειρων με βάση τη D_2

F_{p1}	F_{p2}	F_7	F_3	F_z	F_4	F_8	T_3	C_3	C_Z	C_4	T_4	T_5	P_3	P_Z	P_4	T_6	O_1	O_2	Απαγ.
	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	F_{p1}
		1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	F_{p2}
			1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	F_7
				0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	F_3
					0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	F_z
						0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	F_4
							0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	F_8
								0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	T_3
									0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	C_3
										0	0	1	0	0	0	0	1	0	C_z
											0	0	0	0	1	0	1	1	C_4
												1	1	1	1	0	1	1	T_4
													0	0	1	0	1	1	T_5
														0	0	1	1	0	P_3
															0	1	1	0	P_z
																1	1	0	P_4
																	0	1	T_6
																		0	O_1
																			O_2

Πίνακας 7.5: Πρότυπα αριστερόχειρων με βάση τη D_2

F_{p1}	F_{p2}	F_7	F_3	F_z	F_4	F_8	T_3	C_3	C_Z	C_4	T_4	T_5	P_3	P_Z	P_4	T_6	O_1	O_2	Απαγ.
	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	F_{p1}
		0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	F_{p2}
			0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	F_7
				0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	F_3
					0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	F_z
						1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	F_4
							0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	F_8
								0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	T_3
									0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	C_3
										0	1	0	1	1	1	0	1	1	C_z
											0	0	1	1	1	0	1	1	C_4
												0	1	1	1	1	1	1	T_4
													0	1	1	1	1	1	T_5
														0	0	1	0	1	P_3
															0	1	1	1	P_z
																1	0	1	P_4
																	1	1	T_6
																		0	O_1
																			O_2

Η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν δείχνει ότι οι απαγωγές των δεξιόχειρων ομαδοποιούνται σε τρεις κατηγορίες. Η πρώτη περιλαμβάνει τις απαγωγές που παρουσιάζουν στατιστικά σημαντικές υψηλότερες τιμές σε σύγκριση με τις υπόλοιπες απαγωγές. Η κατηγορία

αυτή αποτελείται από τις απαγωγές T_5, T_3, F_3, F_4, F_8 και T_4 . Η δεύτερη κατηγορία αντιστοιχεί στις μικρότερες τιμές της διάστασης συσχετισμού και περιλαμβάνει εκείνες τις απαγωγές που παρουσιάζουν στατιστικά σημαντικές μικρότερες τιμές σε σύγκριση με τις απαγωγές της πρώτης κατηγορίας. Η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει τις απαγωγές O_1, O_2, P_4, P_z, P_3 και C_z . Τέλος, η τρίτη κατηγορία περιλαμβάνει τις υπόλοιπες απαγωγές $F_7, F_{p1}, F_{p2}, C_3, F_z, C_4$ και T_6 , οι οποίες χαρακτηρίζονται από ενδιάμεσες τιμές της διάστασης συσχετισμού D_2 και δεν παρουσιάζουν στατιστικά σημαντικές διαφορές σε σύγκριση με τις άλλες απαγωγές. Ειδικότερα, οι αριστερές και δεξιές κροταφικές εγκεφαλικές περιοχές παρουσιάζουν τις υψηλότερες τιμές D_2 , ενώ οι ινιακές εγκεφαλικές περιοχές εμφανίζουν τις μικρότερες τιμές. Οι εμπρόσθιες περιοχές παρουσιάζουν τιμές D_2 μεταξύ των τιμών D_2 των κροταφικών και ινιακών περιοχών (βλπ Πίνακα 7.3, αριστερό μισό).

Οι απαγωγές των αριστερόχειρων ομαδοποιούνται επίσης σε τρεις κατηγορίες. Η πρώτη περιλαμβάνει τις απαγωγές που παρουσιάζουν στατιστικά σημαντικές υψηλότερες τιμές σε σύγκριση με τις υπόλοιπες απαγωγές. Η κατηγορία αυτή αποτελείται από τις απαγωγές $T_5, T_3, C_3, F_3, F_7, F_z$ και F_{p1} . Η δεύτερη κατηγορία αντιστοιχεί στις μικρότερες τιμές της διάστασης συσχετισμού και περιλαμβάνει εκείνες τις απαγωγές που παρουσιάζουν στατιστικά σημαντικές μικρότερες τιμές σε σύγκριση με τις απαγωγές της πρώτης κατηγορίας. Η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει τις απαγωγές O_1, O_2, P_4, P_z και P_3 . Τέλος, η τρίτη κατηγορία περιλαμβάνει τις υπόλοιπες απαγωγές $C_z, C_4, F_4, F_{p2}, F_8, T_4$ και T_6 , οι οποίες χαρακτηρίζονται από ενδιάμεσες τιμές της διάστασης συσχετισμού D_2 και δεν παρουσιάζουν στατιστικά σημαντικές διαφορές σε σύγκριση με τις άλλες απαγωγές. Ειδικότερα, οι απαγωγές που βρίσκονται στο αριστερό ημισφαίριο παρουσιάζουν τις υψηλότερες τιμές D_2 , ενώ οι απαγωγές που υπέρκεινται των ινιακών εγκεφαλικών περιοχών εμφανίζουν τις μικρότερες τιμές. Οι απαγωγές των εμπρόσθιων και δεξιών περιοχών παρουσιάζουν τιμές D_2 μεγαλύτερες από τις τιμές D_2 των ινιακών περιοχών (βλπ Πίνακα 7.3, δεξί μισό).

Η ίδια διαδικασία επεξεργασίας εφαρμόστηκε για τις τιμές της διάστασης συσχετισμού που προέκυψαν χρησιμοποιώντας τον εκτιμητή του Takens. Οι τιμές αυτές της D_2 παρουσίασαν την ίδια συμπεριφορά με τις τιμές του εκτιμητή χορδής. Ανάλυση σημαντικότητας έγινε επίσης και για τα άλλα δύο μεγέθη της μελέτης, C_{r1} και P_{alpha} . Επίσης, υπολογίστηκαν τα πρότυπα των δεξιόχειρων και των αριστερόχειρων που βασίζονται στα μεγέθη αυτά, C_{r1} και P_{alpha} .

Στη συνέχεια ελέγχσαμε την ταξινόμηση των συμμετεχόντων στη μελέτη μας στις δύο κλάσεις χρησιμοποιώντας τα πρότυπα που αντιστοιχούν σε ένα, δύο ή και στα τρία υπολογισθέντα μεγέθη. Ο Πίνακας 7.6 παρουσιάζει τα αποτελέσματα της ταξινόμησης. Όπως φαίνεται από τον πίνακα αυτό, τα καλύτερα αποτελέσματα προκύπτουν όταν χρησιμοποιούμε τα πρότυπα που βασίζονται στη διάσταση συσχετισμού. Σημειώνεται επίσης ότι τα πρότυπα που αντιστοιχούν σε συνδυασμούς μεγεθών δεν δίνουν σημαντικά καλύτερα αποτελέσματα από τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη χρήση των προτύπων που αντιστοιχούν στη διάσταση συσχετισμού.

Πίνακας 7.6: Αποτελέσματα της ταξινόμησης των συμμετεχόντων στις κλάσεις 1 και 2

Ταξινόμηση με βάση το μέγεθος D_2				
	Κλάση 1	Κλάση 2	x^2	p
Δεξιόχειρες	14	1	17.36	0.640
Αριστερόχειρες	1	9		

Ταξινόμηση με βάση το μέγεθος C_{r1}				
	Κλάση 1	Κλάση 2	x^2	p
Δεξιόχειρες	10	5	5.24	0.416
Αριστερόχειρες	2	8		

Ταξινόμηση με βάση το μέγεθος P_{alpha}				
	Κλάση 1	Κλάση 2	x^2	p
Δεξιόχειρες	10	5	5.24	0.416
Αριστερόχειρες	2	8		

Ταξινόμηση με βάση τα μεγέθη D_2 και C_{r1}				
	Κλάση 1	Κλάση 2	x^2	p
Δεξιόχειρες	13	2	11.11	0.554
Αριστερόχειρες	2	8		

Ταξινόμηση με βάση τα μεγέθη D_2 και P_{alpha}				
	Κλάση 1	Κλάση 2	x^2	p
Δεξιόχειρες	12	3	8.77	0.509
Αριστερόχειρες	2	8		

Ταξινόμηση με βάση τα μεγέθη C_{r1} και P_{alpha}				
	Κλάση 1	Κλάση 2	x^2	p
Δεξιόχειρες	9	6	3.90	0.367
Αριστερόχειρες	2	8		

Ταξινόμηση με βάση τα μεγέθη D_2 , C_{r1} και P_{alpha}				
	Κλάση 1	Κλάση 2	x^2	p
Δεξιόχειρες	13	2	14.31	0.603
Αριστερόχειρες	1	9		

Τέλος, εφαρμόσαμε τη μέθοδο της ανάλυσης δεδομένων αντικατάστασης για να ελέγξουμε τη μη γραμμική φύση των ΗΕΓ καταγραφών, χρησιμοποιώντας και τα δύο μη γραμμικά μεγέθη (D_2 και C_{r1}). Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 7.7 και δείχνουν ότι στην πλειοψηφία των εποχών η αρχική υπόθεση της γραμμικότητας δεν μπορεί να απορριφθεί. Ας σημειωθεί, ότι βρήκαμε συγκεκριμένες εποχές για τις οποίες η αρχική υπόθεση θα μπορούσε να απορριφθεί ως προς την D_2 αλλά καμία από αυτές τις εποχές δεν ικανοποιούσε το κριτήριο αυτό ως προς το C_{r1} και αντιστρόφως. Τέλος, ο συνδυασμός των αποτελεσμάτων που λαμβάνονται από οποιοδήποτε από τα δύο μεγέθη τείνει να αυξήσει το ποσοστό απόρριψης της αρχικής υπόθεσης στο επίπεδο της τιμής $p < 0.05$.

Πίνακας 7.7: Ποσοστά των εποχών για τις οποίες απορρίπτεται η αρχική υπόθεση της γραμμικότητας ($p < 0.05$)

Δεξιόχειρες					Αριστερόχειρες				
Απαγ.	Ποσοστό ως προς D_2	Ποσοστό ως προς C_{r1}	Ποσοστό ως προς D_2 και C_{r1}	Ποσοστό ως προς D_2 ή C_{r1}	Απαγ.	Ποσοστό ως προς D_2	Ποσοστό ως προς C_{r1}	Ποσοστό ως προς D_2 και C_{r1}	Ποσοστό ως προς D_2 ή C_{r1}
F_{p1}	0.34	0.21	0.08	0.47	F_{p1}	0.27	0.31	0.09	0.48
F_{p2}	0.29	0.25	0.07	0.47	F_{p2}	0.31	0.25	0.09	0.47
F_7	0.40	0.23	0.11	0.52	F_7	0.35	0.32	0.12	0.55
F_3	0.20	0.18	0.04	0.34	F_3	0.27	0.24	0.11	0.40
F_z	0.18	0.13	0.04	0.28	F_z	0.20	0.19	0.07	0.32
F_4	0.21	0.15	0.03	0.33	F_4	0.39	0.19	0.07	0.51
F_8	0.23	0.21	0.07	0.38	F_8	0.37	0.28	0.13	0.52
T_3	0.28	0.12	0.04	0.36	T_3	0.20	0.23	0.07	0.36
C_3	0.20	0.15	0.04	0.31	C_3	0.21	0.21	0.04	0.39
C_z	0.17	0.15	0.03	0.28	C_z	0.17	0.19	0.03	0.33
C_4	0.23	0.13	0.02	0.34	C_4	0.19	0.25	0.07	0.37
T_4	0.17	0.15	0.02	0.29	T_4	0.29	0.39	0.12	0.56
T_5	0.42	0.23	0.13	0.52	T_5	0.36	0.16	0.11	0.41
P_3	0.27	0.18	0.07	0.37	P_3	0.33	0.21	0.07	0.48
P_z	0.26	0.18	0.04	0.40	P_z	0.32	0.25	0.15	0.43
P_4	0.32	0.18	0.04	0.47	P_4	0.47	0.17	0.11	0.53
T_6	0.32	0.15	0.05	0.42	T_6	0.39	0.25	0.12	0.52
O_1	0.54	0.34	0.26	0.63	O_1	0.35	0.17	0.07	0.45
O_2	0.49	0.18	0.12	0.55	O_2	0.55	0.23	0.15	0.63

7.4 Σχολιασμός αποτελεσμάτων

Ο σκοπός της μελέτης των εκτιμήσεων της διάστασης συσχετισμού του ανθρώπινου φυσιολογικού ΗΕΓ είναι διττός. Ο πρώτος στόχος είναι η διερεύνηση της σημαντικότητας των διαφορών της διάστασης συσχετισμού που παρουσιάζονται για τις καταγραφές του ΗΕΓ σε διάφορες εγκεφαλικές περιοχές. Ο δεύτερος στόχος είναι, χρησιμοποιώντας τη διάσταση συσχετισμού, να προσδιοριστούν συγκεκριμένα ειδικά πρότυπα που χαρακτηρίζουν το ΗΕΓ δεξιόχειρων και αριστερόχειρων φυσιολογικών και να διερευνηθεί ο συσχετισμός αυτών με τη δεξιοχειρία / αριστεροχειρία. Χρησιμοποιήσαμε τη διάκριση μεταξύ δεξιοχειρίας και αριστεροχειρίας εξαιτίας της γενικά αποδεκτής σχέσης μεταξύ δεξιοχειρίας / αριστεροχειρίας και κυριαρχίας ημισφαιρίου σχετικά με τη γλωσσική λειτουργία. Υποθέτουμε ότι οι διαφορές στην επικράτηση δεξιοχειρίας / αριστεροχειρίας αντανακλούν μια διαφορετική λειτουργική οργάνωση του φλοιού των φυσιολογικών ενηλίκων.

Παρόλο που έχουμε πρόσβαση μόνο στο ΗΕΓ που καταγράφεται από τα ηλεκτρόδια επιφανείας, θεωρούμε ότι οι απαγωγές μας δειγματοληπτούν μόνο το ΗΕΓ σήμα που παράγεται στην άμεση γειτονία τους, δηλαδή από τις φλοιϊκές περιοχές που υπόκεινται της θέσης τους παρά από τις περιοχές που είναι αρκετά μακρύτερα. Τα ευρήματά μας δείχνουν ότι οι εκτιμήσεις της D_2 ποικίλουν σε ένα μεγάλο εύρος τιμών. Περισσότερο ενδεδεχής έρευνα των αποτελεσμάτων των Πινάκων 7.2 και 7.3 οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι τιμές της διάστασης συσχετισμού εξαρτώνται από τους συμμετέχοντες. Έτσι, δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε συγκεκριμένες τιμές D_2 για συγκεκριμένες απαγωγές για όλους τους συμμετέχοντες. Επομένως, ο απλός υπολογισμός των τιμών της διάστασης συσχετισμού ενηλίκων φυσιολογικών που βρίσκονται σε ηρεμία είναι ακατάλ-

ληλος για οποιαδήποτε ουσιαστική ανάλυση δεδομένων κατά ομάδες. Ωστόσο, σε ατομική βάση οι τιμές της διάστασης συσχετισμού συγκεκριμένων απαγωγών παρουσίασαν σημαντικές διαφορές σε σύγκριση με τις τιμές των άλλων απαγωγών. Επομένως, αφού αυτή η ιδιότητα παρατηρήθηκε σε όλους σχεδόν τους συμμετέχοντες, ανεξάρτητα από τις ίδιες τις τιμές της D_2 , οδηγηθήκαμε στο διαχωρισμό των απαγωγών σε τρεις κατηγορίες για κάθε μία από τις δύο ομάδες (δεξιόχειρες - αριστερόχειρες) των συμμετεχόντων. Οι κατηγορίες που προέκυψαν είναι διαφορετικές για κάθε ομάδα και οδηγούν στον καθορισμό διαφορετικών προτύπων που χαρακτηρίζουν την κάθε ομάδα.

Και στα δύο πρότυπα οι υψηλότερες τιμές της διάστασης συσχετισμού παρατηρούνται στις εμπρόσθιες και κροταφικές περιοχές, ενώ οι μικρότερες τιμές μετρήθηκαν στις ινιακές περιοχές. Συγκεκριμένα, οι δεξιόχειρες παρουσιάζουν τις υψηλότερες τιμές στις απαγωγές που τοποθετούνται στις αριστερές και δεξιές κροταφικές περιοχές, ενώ οι αριστερόχειρες στις απαγωγές που τοποθετούνται στο αριστερό ημισφαίριο. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν για τους αριστερόχειρες δείχνουν ότι οι τιμές της D_2 δεν μπορούν απλά και μόνο να είναι το αποτέλεσμα του φιλτραρίσματος του ΗΕΓ σήματος από τις ανατομικές δομές του εγκεφάλου. Οι αριστερόχειρες διαθέτουν μορφολογικά ταυτόσημο αλλά λειτουργικά διαφορετικό φλοιό. Περίπου 20 – 40% των αριστερόχειρων παρουσιάζουν γλωσσική επικράτηση του δεξιού ημισφαιρίου [14], [25]. Ακόμη και αν η ημισφαιρική εξειδίκευση στους αριστερόχειρες διαχωριστεί από τη δεξιόχειρία / αριστεροχειρία, την κατανόηση της γλώσσας ή την επεξεργασία πληροφοριών, θα παραμείνει ένα σημαντικό ποσοστό των αριστερόχειρων συμμετεχόντων με περιοχή τριτογενούς συσχέτισης στη δεξιά βρεγματοκροταφική περιοχή [25]. Τα αποτελέσματά μας δείχνουν ότι τα πρότυπα ως προς τη διάσταση συσχετισμού D_2 των αριστερόχειρων διαφέρουν από τα αντίστοιχα των δεξιόχειρων. Συμπεραίνουμε επομένως ότι οι εκτιμήσεις της διάστασης συσχετισμού περιέχουν πληροφορίες σχετικά με τη λειτουργικότητα των φλοιϊκών περιοχών και δεν αντανακλούν απλώς διαφορές στην εγκεφαλική μορφολογία των λοβών του ενός ημισφαιρίου.

Η ανάλυση της ταξινόμησης δείχνει ότι τα καλύτερα αποτελέσματα λαμβάνονται όταν χρησιμοποιούμε τα πρότυπα που αντιστοιχούν στη διάσταση συσχετισμού. Η χρήση των προτύπων αυτών παρουσιάζει σημαντικά ποσοστά επιτυχίας στο διαχωρισμό μεταξύ δεξιόχειρων και αριστερόχειρων φυσιολογικών ενηλίκων. Αντίθετα, η χρησιμοποίηση των προτύπων που βασίζονται στα υπόλοιπα μεγέθη της μελέτης δεν οδήγησε στα ίδια υψηλά ποσοστά σωστής ταξινόμησης των συμμετεχόντων. Τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώνουν ότι η διάσταση συσχετισμού δεν είναι ένα τυχαίο μέγεθος, αλλά μάλλον αντανακλά με μεγαλύτερη ακρίβεια τη λειτουργική οργάνωση των υποκείμενων φλοιϊκών περιοχών που παράγουν τα ΗΕΓ σήματα που καταγράφονται σε ενήλικες φυσιολογικούς οι οποίοι βρίσκονται σε κατάσταση ηρεμίας. Αξίζει να σημειωθεί ότι η αναγνώριση τέτοιων προτύπων εντοπισμού θα ήταν ιδιαίτερα δύσκολη εάν είχε ακολουθηθεί η μέθοδος της χωρικής εμβάπτισης για όλες τις απαγωγές σε μια δεδομένη χρονική στιγμή αντί για την χρονική εμβάπτιση που ακολουθήσαμε. Στην πραγματικότητα η χωρική εμβάπτιση είναι στην πράξη λιγότερο κατάλληλη από τη χρονική εμβάπτιση για την εξαγωγή των διακριτών τοπικών φαινομένων τα οποία τείνουν να διαταράσσονται από το ένιαίο πεδίο του φλοιού [95], [100], [101]. Αυτό ίσως να εξηγεί γιατί σε προηγούμενες μελέτες άλλοι ερευνητές δεν είχαν κάνει ανάλογες παρατηρήσεις.

Το σχετικά χαμηλό ποσοστό εποχών για τις οποίες απορρίπτεται η αρχική υπόθεση της γραμμικότητας βρίσκεται σε συμφωνία με παρόμοια αποτελέσματα άλλων μελετών [118], [130]. Ειδικότερα, οι Stam et al. [118] μελέτησαν τη δυναμική του ανθρώπινου άλφα ρυθμού. Κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι ο άλφα ρυθμός είναι μια ετερογενής οντότητα ως προς τη δυναμική της φλοιϊκής δραστηριότητας. Έτσι, οι εποχές τύπου-I που αντιπροσωπεύουν τη συντριπτική πλειοψηφία (98.75%) των εποχών του άλφα ρυθμού δεν μπορούν να διακριθούν από το φιλτραρισμένο θόρυβο. Αντίθετα, για τις εποχές τύπου-II, η αρχική υπόθεση της γραμμικότητας απορρίπτεται. Στην περίπτωση αυτή, η μη γραμμική συμπεριφορά μπορεί να εξηγηθεί από τη δυναμική στη γειτονία μιας διακλάδωσης που οδηγεί σε συμπεριφορά τύπου οριακού κύκλου. Επιπλέον, οι ίδιοι ερευνητές αναφέρουν παρόμοια ευρήματα μελετώντας τη συμπεριφορά του μοντέλου του άλφα ρυθμού που

προτάθηκε από τους Lopes da Silva et al [79].

Οι καταγραφές μας έγιναν χρησιμοποιώντας το μοντάζ κοινής αναφοράς με κοινό ηλεκτρόδιο αναφοράς το F_{pz} . Αν και γνωρίζουμε ότι με τον τρόπο αυτό ίσως να χρησιμοποιούμε ένα ενεργό ηλεκτρόδιο ως αναφορά, η επιλογή αυτή ήταν η μόνη πρακτική ώστε να ελαχιστοποιήσουμε την πιθανότητα είτε να εισάγουμε συστηματική κλίση από ένα ασύμμετρα τοποθετημένο ηλεκτρόδιο είτε να λάβουμε περισσότερα παράσιτα χρησιμοποιώντας ένα εξωκρανιακό ηλεκτρόδιο αναφοράς. Επιπλέον, εξασφαλίσαμε ότι ο πληθυσμός μας αποτελείτο από απολύτως υγιείς και οι καταγραφές πραγματοποιήθηκαν κάτω από παρόμοιες συνθήκες σε κατάσταση ελεγχόμενης επαγρύπνησης. Σημειώνεται ότι ο πρωταρχικός στόχος μας ήταν ο προσδιορισμός πλευρικών διαφορών οι οποίες θα μας βοηθούσαν στο διαχωρισμό δεξιόχειρων και αριστερόχειρων παρά η εξαγωγή απολύτων τιμών για τα υπό μελέτη μεγέθη.

Σχετικά με τη μη γραμμική μεθοδολογία σημειώνουμε ότι έχει αναπτυχθεί ένα πλήθος μεγεθών που χαρακτηρίζουν πολύπλοκες χρονοσειρές με βάση τις αρχές της μη γραμμικής δυναμικής. Τα μεγέθη αυτά, αν και έχουν αποδειχθεί αρκετά αξιόπιστα στις θεωρητικές μελέτες της συμπεριφοράς των μη γραμμικών συστημάτων, στην πράξη, η περίπλοκη φύση και η εγγενής τάση προς τη στοχαστικότητα και τη μη στατικότητα των φυσιολογικών χρονοσειρών κάνει δύσκολη, αν όχι αδύνατη, την ερμηνεία των μεγεθών αυτών. Για παράδειγμα, από τις πειραματικές συνθήκες της παρούσας μελέτης, δύο είναι οι παράγοντες που προσδιορίζουν κάθε ελκυστή: ο συμμετέχοντας (συμπεριλαμβανομένης της πληροφίας αριστεροχειρίας / δεξιοχειρίας) και η απαγωγή. Παρόλο που θεωρητικά η διάσταση συσχετισμού είναι ένα αναλλοίωτο μέγεθος του ελκυστή, οι εποχές που αντιστοιχούν στον ίδιο ελκυστή (εποχές του ίδιου συμμετέχοντα, από την ίδια απαγωγή αλλά ξεκινούν από διαφορετικές χρονικές στιγμές) δίνουν διαφορετικές D_2 τιμές. Στην πράξη, οι εκτιμήσεις της διάστασης συσχετισμού υπόκεινται σε σημαντική αβεβαιότητα λόγω του γεγονότος ότι το πλήθος των σημείων είναι πεπερασμένο. Σειρές του μήκους που χρησιμοποιήσαμε στη μελέτη ή και με ακόμη μικρότερο μήκος έχουν ευρύτατα χρησιμοποιηθεί στη βιβλιογραφία για τα ΗΕΓ δεδομένα [18], [19], [57], [117], [118]. Επιπρόσθετα, οι πειραματικές συνθήκες είναι αρκετά διαφορετικές μεταξύ των διαφόρων μελετών. Ειδικότερα, οι αυθόρμητες γνωσιακές επεξεργασίες κατά τη διάρκεια της διαδικασίας του ΗΕΓ ρουτίνας δεν μπορούν να εξακριβωθούν αφού η επαγρύπνηση, η εγρήγορση, η μνημονική επεξεργασία, το συναισθηματικό περιεχόμενο κλπ είναι εξαιρετικά προσωπικές μεταβλητές που δεν αναπαράγονται. Θα ήταν δυνατόν, ένας καλύτερος καθορισμός της νοητικής λειτουργίας κατά τη διάρκεια των ΗΕΓ καταγραφών να μείωνε τη μεταβλητότητα της διάστασης συσχετισμού. Επίσης, παρατηρούνται διαφορές στον τρόπο εφαρμογής του αλγορίθμου των Grassberger-Proccacia [49] ανάμεσα στις διάφορες μελέτες. Σε όλους αυτούς τους λόγους θα μπορούσε να αποδοθεί η εντυπωσιακή διακύμανση της διάστασης των ΗΕΓ καταγραφών κατά τη διάρκεια της κατάστασης εγρήγορσης που παρατηρήθηκαν στη μελέτη μας καθώς και σε άλλες μελέτες. Για να υπερνικηθεί το πρόβλημα αυτό, πολλοί ερευνητές έχουν προτείνει τη χρήση πρότυπων πειραματικών συνθηκών κατά τη διάρκεια της συλλογής δεδομένων και της αξιολόγησής τους [46]. Για παράδειγμα, αντί για τον προσδιορισμό της D_2 στη γραμμική περιοχή, μπορεί κανείς να την υπολογίσει για προκαθορισμένες σταθερές τιμές απόστασης και διάστασης συσχετισμού λαμβάνοντας μια προσεγγιστική εκτίμηση της D_2 [53], [98]. Στην κατεύθυνση αυτή χρησιμοποιήσαμε μια σταθερή τιμή της διάστασης συσχετισμού και το μέγεθος C_{T1} . Μάλιστα υποστηρίζεται ότι οι προσεγγιστικές εκτιμήσεις προσφέρουν μια σχετικά άμεση και ευσταθή μη γραμμική μέθοδο για το χαρακτηρισμό χρονοσειρών. Οι περισσότεροι ερευνητές σήμερα συμφωνούν ότι η ανάλυση χρονοσειρών πειραματικών δεδομένων, και ειδικότερα των ΗΕΓ σημάτων, είναι εφικτή εάν η υλοποίηση των αλγορίθμων γίνεται με προσοχή. Με καλή κατανόηση των μεθόδων και μεγάλη προσοχή στην εφαρμογή τους, η μη γραμμική ανάλυση χρονοσειρών μπορεί να γίνει ένα ισχυρό εργαλείο στην αποτίμηση της δυναμικής των πολύπλοκων συστημάτων όπως ο ανθρώπινος εγκέφαλος.

Συμπερασματικά, τα αποτελέσματά μας δείχνουν ότι οι απαγωγές που εμφανίζουν μορφές με υψηλότερες τιμές της διάστασης συσχετισμού, αντιστοιχούν σε υποκείμενες φλοιϊκές περιοχές υ-

ψηλότερης λειτουργικής τάξης. Οι μορφές αυτές, παρά οι απόλυτες τιμές της D_2 , φαίνεται ότι αποτελούν κριτήριο για τη δεξιοχειρία / αριστεροχειρία και ίσως ακόμη και το ημισφαίριο που επικρατεί. Μια τέτοια προοπτική θα μπορούσε να προσφέρει ένα άμεσα ποσοτικοποιημένο μέγεθος προσδιορισμού της δεξιοχειρίας / αριστεροχειρίας π.χ. στην προχειρουργική αξιολόγηση της μη ελέγξιμης επιληψίας, χωρίς ενδεχομένως τη χρήση των σημερινών μεθόδων που απαιτούν εξωτερικές, φαρμακευτικές ή άλλες παρεμβάσεις. Παρόλο που ακόμη βρισκόμαστε πάρα πολύ μακριά από τη βεβαιότητα, ο υπολογισμός της διάστασης συσχετισμού στο μεσοκριτικό ΗΕΓ, αφού προηγηθεί μια σειρά από μελέτες της αξιοπιστίας των σχετικών τεστ, θα μπορούσε να προσφέρει τη δυνατότητα μείωσης των κινδύνων για την υγεία και να παρέχει πληροφορίες σχετικές όχι μόνο με τη γλωσσική απαρτίωση αλλά και την απαρτίωση άλλων τριτογενών περιοχών.

Μέρος III

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Κεφάλαιο 8

Έλεγχος Παρουσίας Μη Γραμμικοτήτων στο Η.Ε.Γ.

Πάρα πολλοί ερευνητές ασχολούνται με την επιβεβαίωση της γραμμικής ή μη γραμμικής συμπεριφοράς των ΗΕΓ σημάτων [137]. Τα κυριότερα ερωτήματα που ζητούν απάντηση είναι: Τα ΗΕΓ σήματα περιγράφονται καλύτερα ως ντετερμινιστικά ή στοχαστικά σήματα; [68], [97] Είναι τα γραμμικά μοντέλα αρκετά για να περιγράψουν ακριβώς τα χαρακτηριστικά της εγκεφαλογραφικής συμπεριφοράς; Μήπως ένα μη γραμμικό μοντέλο παρέχει περισσότερες πληροφορίες που θα μπορούσαν να εξηγήσουν την ηλεκτροεγκεφαλογραφική δραστηριότητα; Είναι γεγονός ότι καταβάλλεται μια συνεχής προσπάθεια για να διακριβωθεί εάν τα γραμμικά ή τα μη γραμμικά μοντέλα περιγράφουν καλύτερα τις ηλεκτροεγκεφαλογραφικές καταγραφές των διαφόρων περιοχών του εγκεφάλου. Είναι πολύ δύσκολο να δοθούν οριστικές απαντήσεις λόγω της μεγάλης πολυπλοκότητας τόσο των σημάτων όσο και του συστήματος (εγκέφαλος) που τα παράγει. Ωστόσο, τα αποτελέσματα που λαμβάνονται από τις αναλύσεις αυτές -ακόμη και τα φαινομενικά ασήμαντα- είναι πολύ χρήσιμα στις προσπάθειες μοντελοποίησης, χαρακτηρισμού και πρόβλεψης των ΗΕΓ σημάτων. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε συνοπτικά μερικές από τις πιο γνωστές μεθόδους για τη γραμμική/μη γραμμική ταυτοποίηση και τις εφαρμόζουμε στα ΗΕΓ σήματα με σκοπό τη σύγκριση των αποτελεσμάτων της κάθε μεθόδου [67].

8.1 Γραμμικά αυτοπαλινδρούμενα μοντέλα (LAR)

Σύμφωνα με τα μοντέλα αυτά, τα δείγματα του ΗΕΓ $x(n)$ εκφράζονται ως γραμμική συνάρτηση των M προηγούμενων δειγμάτων, δηλαδή:

$$x(n) = \sum_{i=1}^M a_i x(n-i) + e(n), \quad n = M+1, M+2, \dots, N \quad (8.1)$$

Η εξίσωση (8.1) καλείται M τάξης γραμμικό αυτοπαλινδρούμενο μοντέλο (LAR: Linear Autoregressive) [77] και το $e(n)$ αντιπροσωπεύει μηδενικής μέσης τιμής γκαουσιανό θόρυβο, ασυσχέτιστο με το σήμα. Η ταυτοποίηση του AR μοντέλου περιλαμβάνει τον υπολογισμό και της τάξης M και των συντελεστών a_i . Υπάρχουν διάφορες ευριστικές τεχνικές για τον προσδιορισμό της σωστής τάξης, όπως το κριτήριο του Akaike [3]. Σύμφωνα με αυτό η τάξη M προσδιορίζεται ως η τιμή που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση

$$AIC(M) = N \log V_M + 2M \quad (8.2)$$

όπου V_M είναι η διασπορά των υπολοίπων του AR μοντέλου M τάξης. Έτσι ο συντελεστής a_M του τελικού όρου θεωρείται σημαντικός εάν $AIC(M) - AIC(M-1) < 0$. Οι συντελεστές

a_i υπολογίζονται από τις γνωστές εξισώσεις Yule-Walker. Και τα δύο μέλη της εξίσωσης (8.1) πολλαπλασιάζονται με $x(t - \tau)$, στη συνέχεια λαμβάνονται οι μέσες τιμές και τέλος γίνεται κανονικοποίηση. Οι συντελεστές προκύπτουν από την επίλυση του συνόλου των γραμμικών εξισώσεων:

$$\rho(\tau) = \sum_{i=1}^M a_i \rho(\tau - i), \quad \tau > 0 \quad (8.3)$$

όπου με $\rho(\tau)$ συμβολίζονται οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης. Μια εναλλακτική προσέγγιση είναι ο προσδιορισμός των παραμέτρων έτσι ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών μεταξύ της εξόδου του μοντέλου και των παρατηρουμένων τιμών να είναι ελάχιστο. Τα υπόλοιπα $e(n)$ θα πρέπει ιδανικά να είναι λευκά και ανεξάρτητα της εισόδου ώστε το μοντέλο να θεωρείται όρθη περιγραφή του συστήματος.

8.2 Μη γραμμικά αυτοπαλινδρούμενα μοντέλα (NLAR)

Το μη γραμμικό AR (NLAR: NonLinear AutoRegressive) μοντέλο για το $x(n)$ είναι η μη γραμμική επέκταση της εξίσωσης (8.1), η οποία διατυπώνεται ως εξής:

$$x(n) = \sum_{i=1}^J a_i f_i(x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-M)) + e(n), \quad n = M+1, M+2, \dots, N \quad (8.4)$$

όπου $f = (f_1 \dots f_J)$ είναι ένα σύνολο από J γνωστές συναρτήσεις, μη γραμμικές στη γενική περίπτωση, M η μέγιστη καθυστέρηση και $e(n)$ ο θόρυβος (γκαουσιανός, μηδενικής μέσης τιμής, ασυσχέτιστος με το σήμα) [136]. Οι εκτιμήσεις των a_i γίνονται από τη χρονοσειρά $x(t)$ με ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος $R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^2(t)$. Επίσης, οι εξισώσεις Yule-Walker για τους συντελεστές $a = (a_1 \dots a_J)$ λαμβάνονται από την συνηθισμένη $\frac{\partial R}{\partial a_j} = 0$. Η εξίσωση (8.4) συνήθως χρησιμοποιείται για να ελεγχθεί η σημαντικότητα της προσθήκης ενός μη γραμμικού όρου $f_j(x(t))$ στο AR μοντέλο. Η προσθήκη αυτή έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος κατά ποσοστό που εξαρτάται από το πόσο κοντά είναι ο πρόσθετος όρος στους γραμμικούς συνδυασμούς των προηγούμενων όρων. Κριτήρια παρόμοια με αυτό του Akaike μπορούν να εφαρμοστούν για να αποφασιστεί εάν η προσθήκη του μη γραμμικού όρου οδηγεί σε στατιστικά σημαντική βελτίωση της περιγραφής της χρονοσειράς [136].

8.3 Μη γραμμική ανάλυση

Η χρήση των μεγεθών της μη γραμμικής ανάλυσης σε συνδυασμό με τη μέθοδο των δεδομένων αντικατάστασης (surrogate) που περιγράφηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, συνιστούν μία ακόμη προσέγγιση για τη διερεύνηση της ύπαρξης μη γραμμικών συνιστωσών σε μια χρονοσειρά.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο έλεγχος με τη μέθοδο των δεδομένων αντικατάστασης (surrogate) στηρίζεται στην αρχική υπόθεση ότι τα δεδομένα περιγράφονται από γραμμικά μοντέλα. Συνεπώς η φάση του FFT δεν μεταφέρει κάποια πληροφορία αλλά όλη η πληροφορία υπάρχει στο πλάτος του. Τα σύνολα των surrogate δεδομένων παράγονται σύμφωνα με την FT μέθοδο που περιγράφηκε στην ενότητα 6.3.2. Έτσι προκύπτει μια συλλογή surrogate χρονοσειρών που αντιστοιχούν στην αρχική χρονοσειρά. Για κάθε μέλος της συλλογής αλλά και για την αρχική χρονοσειρά υπολογίζουμε ένα μη γραμμικό μέγεθος, π.χ. τη διάσταση συσχετισμού. Συμβολίζουμε με \bar{D} και s_D , τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της διάστασης συσχετισμού της συλλογής, αντίστοιχα και με D τη διάσταση συσχετισμού της αρχικής (πραγματικής) χρονοσειράς. Η σημαντικότητά της s

υπολογίζεται από τη σχέση:

$$s = \frac{\|D - \bar{D}\|}{\sigma_D}$$

Εάν είναι $s > 4$ (επίπεδο σημαντικότητας $p < 0.01$), τότε η διάσταση συσχετισμού D θεωρείται στατιστικά σημαντική και η αρχική υπόθεση της γραμμικότητας απορρίπτεται. Επομένως, εφόσον προηγούμενα έχει ελεγχθεί η στατιστικότητα της χρονοσειράς, η απόρριψη υπονοεί την ύπαρξη μη γραμμικής δυναμικής. Εκτός από τη διάσταση συσχετισμού, επαναλαμβάνουμε την ανάλυση και για το μέγεθος $C_{r1} = C(r = 0.1r_{max})$, όπου $C(r)$ είναι το ολοκλήρωμα συσχετισμού.

8.4 Έλεγχοι κανονικότητας - γραμμικότητας

Οι στατιστικές υψηλότερης τάξης [89] παρέχουν το μέγεθος του δείκτη συμφωνίας (bicoherency) για τη διάκριση μιας γραμμικής μη γκαουσιανής διαδικασίας από μια μη γραμμική διαδικασία. Το μέγεθος αυτό ορίζεται ως:

$$B_n(w_1, w_2) = \frac{B(w_1, w_2)}{[S(w_1)S(w_2)S(w_1 + w_2)]^{\frac{1}{2}}}$$

όπου $B(w_1, w_2) = \sum_{i_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{i_2=-\infty}^{+\infty} c_3^x(i_1, i_2) e^{j(w_1 i_1 + w_2 i_2)}$ είναι το διφάσμα, $c_3^x(i_1, i_2)$ είναι η τρίτης τάξης αθροιστική της $\{x(n)\}$, $S(w) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_2^x(i) e^{-jwi}$ η φασματική ισχύς και $c_2^x(i)$ είναι η ακολουθία συνδιακύμανσης της $\{x(n)\}$. Ισχύουν τα εξής:

1. Εάν η $x(n)$ είναι μια γκαουσιανή διαδικασία, τότε $B_n(w_1, w_2) = 0$.
2. Εάν η $x(n)$ είναι μια γραμμική μη γκαουσιανή διαδικασία, τότε $B_n(w_1, w_2) = \text{σταθερή}$.
3. Εάν η $x(n)$ είναι μια μη γραμμική διαδικασία, τότε $B_n(w_1, w_2) = f(w_1, w_2)$.

Ο έλεγχος [52] συνίσταται στη λήψη απόφασης για το α) εάν ή όχι το εκτιμώμενο μέγεθος του δείκτη συμφωνίας είναι μηδενικό και β) εάν ή όχι το εκτιμώμενο μέγεθος του δείκτη συμφωνίας είναι σταθερό.

8.5 Υλικό

Μελετήσαμε τις ΗΕΓ καταγραφές ενός υγιή εθελοντή, 28 ετών και τις καταγραφές ενός επιληπτικού αρρώστου, 31 ετών, οι οποίες περιλαμβάνουν και περίοδο κρίσης. Συγκεκριμένα οι τελευταίες περιλαμβάνουν προκριτικές, κριτικές και μετακριτικές εποχές. Οι καταγραφές πραγματοποιήθηκαν στον Ψηφιακό Εγκεφαλογράφο (8bit ADC, συχνότητα δειγματοληψίας 128Hz και LPF 50Hz) του Εργαστηρίου Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας της Πανεπιστημιακής Κλινικής του Αιγινήτειου Νοσοκομείου. Τα ηλεκτρόδια τοποθετήθηκαν σύμφωνα με το σύστημα 10 – 20 κατά τα πρότυπα της Αμερικανικής Εταιρείας Εγκεφαλογραφίας. Αφού απορρίφθηκαν τα τμήματα του ΗΕΓ που παρουσίαζαν παράσιτα, η υπόλοιπη καταγραφή χωρίστηκε σε μη επικαλυπτόμενες εποχές διάρκειας 16sec (2048 δείγματα) οι οποίες ελέγχθηκαν ως προς τη στατιστικότητά τους. Τελικά, αναλύθηκαν 15 εποχές του φυσιολογικού εθελοντή και 15 εποχές (5 προκριτικές, 5 κριτικές και 5 μετακριτικές) του επιληπτικού αρρώστου για κάθε μία απαγωγή (συνολικά 285 εποχές για κάθε εξεταζόμενο).

8.6 Αποτελέσματα

8.6.1 Γραμμικά αυτοπαλινδρούμενα μοντέλα

Πρώτα μελετήσαμε τα LAR μοντέλα χρησιμοποιώντας την προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων. Η τάξη του μοντέλου προσδιορίστηκε από το κριτήριο του Akaike. Ο πίνακας 8.1 παρουσιάζει την κατανομή των εποχών στις διάφορες τάξεις. Η αξιολόγηση του μοντέλου γίνεται με τη βοήθεια της ανάλυσης των υπολοίπων και της ικανότητας του μοντέλου να προβλέπει τα επόμενα δείγματα. Το Σχήμα 8.1 παρουσιάζει τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης των σφαλμάτων και τα 95% διαστήματα εμπιστοσύνης για μια συγκεκριμένη εποχή. Το Σχήμα 8.2 παρουσιάζει το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της πρόβλεψης των p επόμενων δειγμάτων. Το συμπέρασμα είναι ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δεν αποκλίνει σημαντικά εκτός των διαστημάτων εμπιστοσύνης. Ωστόσο, το μοντέλο αυτό δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά για την πρόβλεψη των επομένων δειγμάτων γιατί η διακύμανση των σφαλμάτων είναι πολύ μεγάλη.

Πίνακας 8.1: Αποτελέσματα εφαρμογής των γραμμικών αυτοπαλινδρούμενων μοντέλων

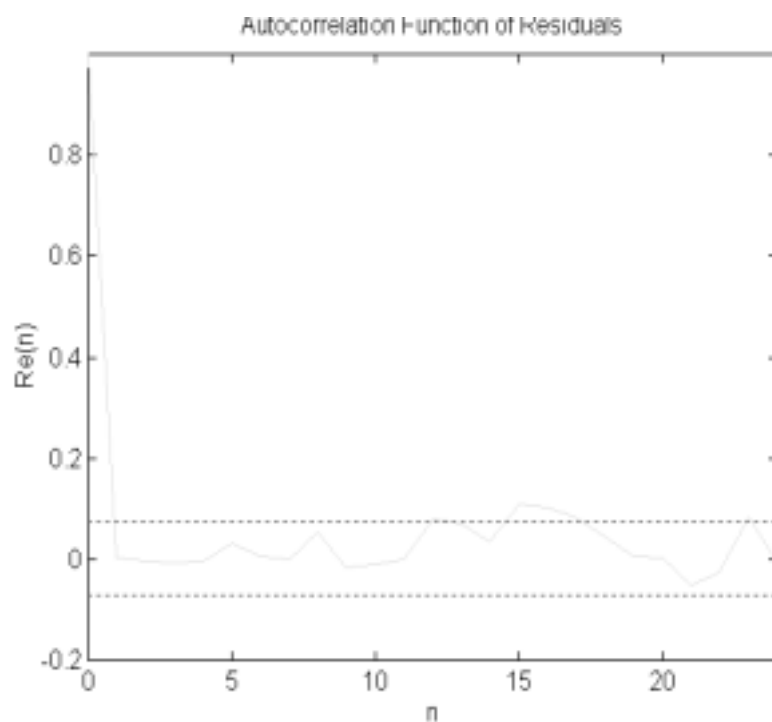
Τάξη	Εποχές Φυσιολογικού	Προκριτικές Εποχές	Κριτικές Εποχές	Μετακριτικές Εποχές
5 – 10	2%	24%	54%	28%
11 – 14	25%	21%	9%	21%
15 – 17	26%	21%	14%	24%
18 – 20	21%	12%	10%	13%
21 – 23	18%	10%	7%	7%
23 – 25	3%	8%	4%	4%
> 25	5%	4%	2%	3%

8.6.2 Μη γραμμικά αυτοπαλινδρούμενα μοντέλα

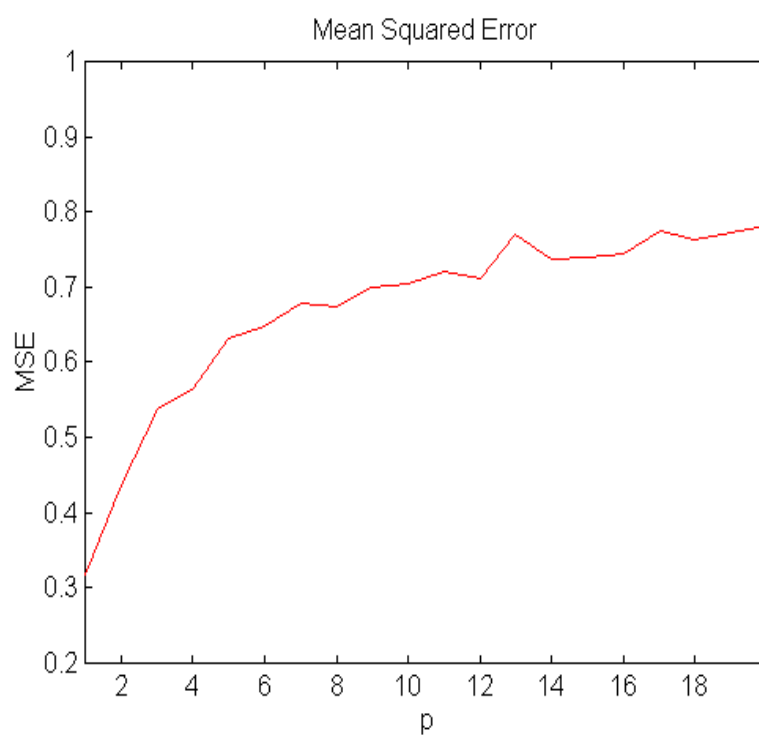
Στη συνέχεια ελέγχουμε τη σημαντικότητα της προσθήκης ενός τετραγωνικού όρου $f_j(x(n-i)) = [x(n-i)]^2$, $i = 1, \dots, M$ στο LAR μοντέλο κάθε εποχής που προσδιορίστηκε προηγούμενα. Το κριτήριο του Akaike δείχνει σημαντική βελτίωση της απόδοσης του μη γραμμικού μοντέλου σε σχέση με το γραμμικό. Το Σχήμα 8.3 παρουσιάζει το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της πρόβλεψης p δειγμάτων χρησιμοποιώντας το NLAR μοντέλο. Η σύγκριση με το Σχήμα 8.2 φανερώνει τη βελτίωση που επέφερε ο τετραγωνικός όρος για μικρά p .

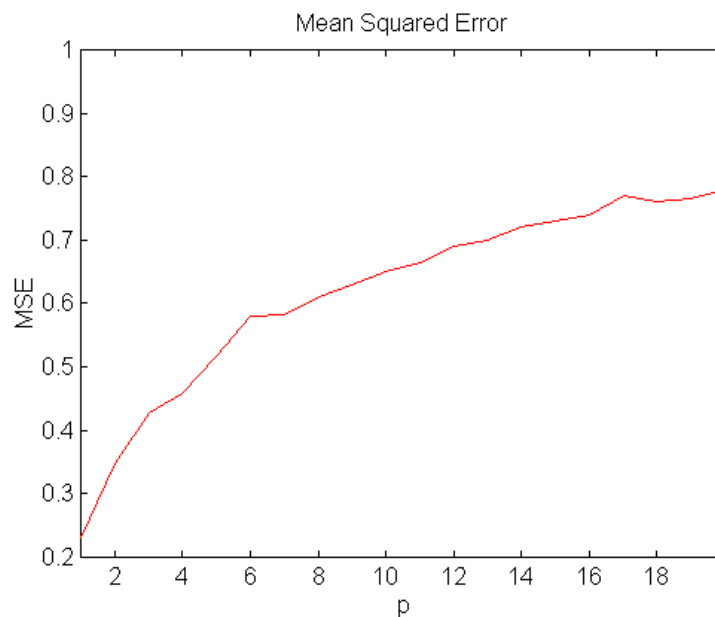
8.6.3 Μη γραμμική ανάλυση

Αρχικά υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα συσχετισμού για κάθε μία εποχή καθώς και για το σύνολο των αντίστοιχων 10 σειρών δεδομένων αντικατάστασης (surrogate). Το Σχήμα 8.4 παρουσιάζει την περίπτωση μιας εποχής του φυσιολογικού ΗΕΓ, ενώ το Σχήμα 8.5 παρουσιάζει την περίπτωση μιας εποχής που αντιστοιχεί σε επιληπτική κρίση. Τα αποτελέσματα της στατιστικής σημαντικότητας των μεγεθών D_2 και $C(r = 0.1r_{max})$ παρουσιάζονται στον Πίνακα 8.2.



Σχήμα 8.1: Ανάλυση υπολοίπων

Σχήμα 8.2: Μέσο τετραγωνικό σφάλμα της πρόβλεψης p δειγμάτων από ένα LAR τάξης 15



Σχήμα 8.3: Μέσο τετραγωνικό σφάλμα της πρόβλεψης p δειγμάτων με χρήση του NLAR που προέκυψε από την προσθήκη τετραγωνικού όρου στο LAR του Σχήματος 6.

Πίνακας 8.2: Στατιστική σημαντικότητα των τιμών των μεγεθών D_2 και C_{r1}

	Εποχές Φυσιολογικού	Προκριτικές Εποχές	Κριτικές Εποχές	Μετακριτικές Εποχές
$S_{D_2} > 4$	8%	14%	54%	28%
$S_{C(r=0.1r_{max})} > 4$	3%	5%	9%	21%
$S_{D_2} > 4$ ή $S_{C(r=0.1r_{max})} > 4$	10%	17%	61%	39%

8.6.4 Έλεγχοι κανονικότητας - γραμμικότητας

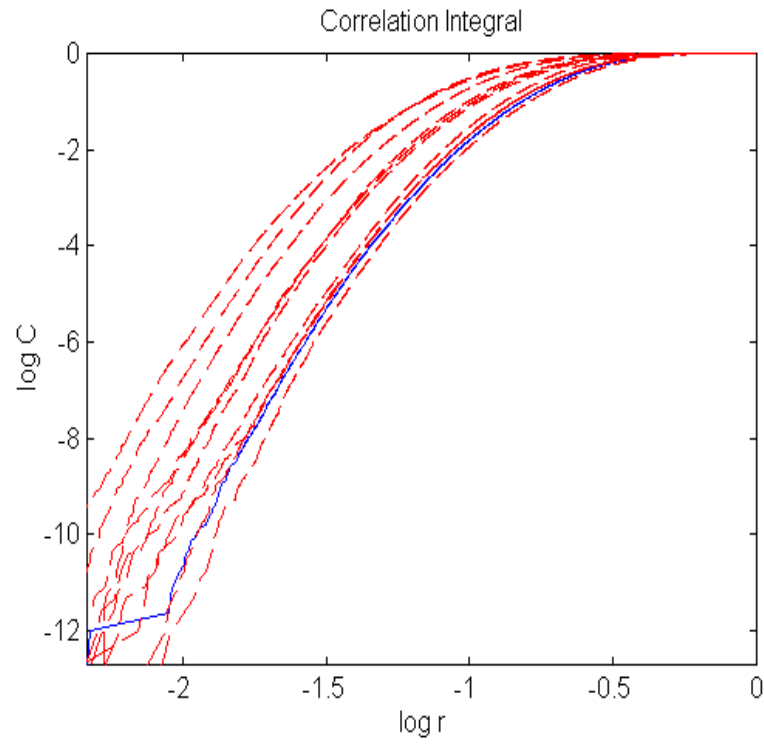
Τα αποτελέσματα των ελέγχων κανονικότητας και μη γραμμικότητας χρησιμοποιώντας υψηλότερης τάξης στατιστικές παρουσιάζονται στον Πίνακα 8.3.

Πίνακας 8.3: Αποτελέσματα ελέγχων κανονικότητας - γραμμικότητας

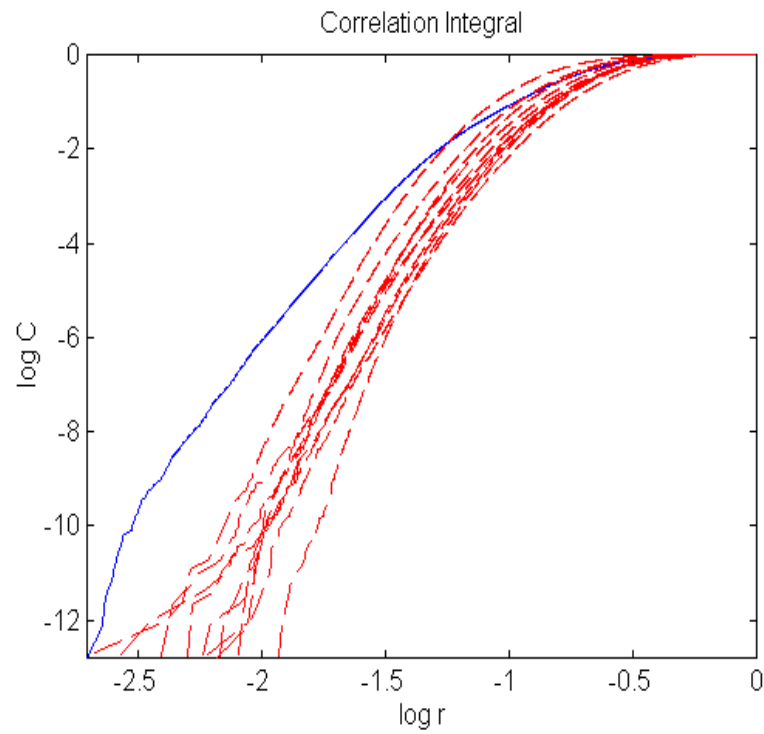
	Εποχές Φυσιολογικού	Προκριτικές Εποχές	Κριτικές Εποχές	Μετακριτικές Εποχές
Γραμμική γκαουσιανή	24%	10%	8%	14%
Μη γκαουσιανή γραμμική	75%	89%	79%	85%
Μη γραμμική	1%	1%	13%	1%

8.6.5 Συμπεράσματα

Αν και η ανάλυση υπολοίπων έδειξε ότι τα γραμμικά μοντέλα παρέχουν μια μάλλον ικανοποιητική περιγραφή του συστήματος, τα σφάλματα παραμένουν σημαντικά και τα LAR μοντέλα μπορούν να



Σχήμα 8.4: Ολοκλήρωμα συσχετισμού για μια εποχή φυσιολογικού ΗΕΓ και των αντιστοίχων δεδομένων αντικατάστασης. Ισχύει $SD_2 < 4$.



Σχήμα 8.5: Ολοκλήρωμα συσχετισμού για μια εποχή που αντιστοιχεί σε κρίση και των αντιστοίχων δεδομένων αντικατάστασης. Ισχύει $SD_2 > 4$.

χρησιμοποιηθούν μόνο για βραχεία πρόβλεψη. Η κατάσταση βελτιώνεται όταν ένας τετραγωνικός όρος προστεθεί στο γραμμικό μοντέλο. Ωστόσο, δε μπορεί να εξαχθεί συμπέρασμα εάν η βελτίωση είναι καλύτερη για τις εποχές του φυσιολογικού ΗΕΓ ή τις εποχές του επιληπτικού ΗΕΓ. Επιπλέον, η προβλεπτική ικανότητα του μοντέλου εξακολουθεί να μην είναι ικανοποιητική. Ίσως ένα μοντέλο με περισσότερους μη γραμμικούς όρους να βοηθούσε προς αυτή την κατεύθυνση. Οι μη γραμμικοί καταχωρητές ολίσθησης με ανάδραση αποτελούν μια πλούσια κλάση μη γραμμικών συστημάτων που θα μπορούσαν να συνεισφέρουν στη μη γραμμική περιγραφή του ΗΕΓ.

Αξίζει να σημειωθεί η διαφορά μεταξύ της συμπεριφοράς του ΗΕΓ που αντιστοιχεί στο φυσιολογικό εθελοντή και του ΗΕΓ που προέρχεται από τον επιληπτικό ασθενή όταν χρησιμοποιούνται οι μέθοδοι της μη γραμμικής ανάλυσης. Λόγω της φύσης του ΗΕΓ σήματος, είναι σχεδόν αδύνατο να έχει κανείς στατικές χρονοσειράς με μεγάλη χρονική διάρκεια. Ωστόσο, τα δυναμικά της κρίσης φαίνεται ότι περιγράφονται καλύτερα από μη γραμμικότητες. Η μη γραμμικότητα είναι ιδιαίτερα εμφανής στις κριτικές εποχές. Επίσης μερικές προκριτικές και σε μεγαλύτερο βαθμό οι μετακριτικές εποχές παρουσιάζουν μη γραμμική συμπεριφορά. Η μη γραμμικότητα στην περίπτωση αυτή μπορεί να αποδοθεί στις αιχμές - κύματα που παρουσιάζει το ΗΕΓ των επιληπτικών ασθενών. Αιχμές επίσης παρουσιάζονται στη μετακριτική περίοδο και μερικές στην προκριτική περίοδο. Παρόμοια ευρήματα για μη γραμμικότητες έχουν αναφερθεί για ενδοβάνθιες καταγραφές [19]. Τα ευρήματα αυτά δείχνουν μη γραμμική συμπεριφορά των καταγραφών που είναι πλησιέστερα προς την επιληπτογόνο περιοχή. Μάλιστα αυτή η συμπεριφορά εμφανίζεται συστηματικά όχι μόνο κατά τη διάρκεια της κρίσης αλλά και πριν και μετά από αυτή.

Τέλος, χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία των στατιστικών υψηλότερης τάξης, το ΗΕΓ φαίνεται να περιγράφεται ως γραμμική μη γκαουσιανή διαδικασία. Σημειώνεται η αύξηση του ποσοστού των μη γραμμικών εποχών κατά τη διάρκεια της κρίσης. Μια πιο λεπτομερής εξέταση δείχνει ότι αυτές οι εποχές συγκεντρώνονται στην αρχή και στο τέλος της περιόδου της κρίσης. Αν και το ποσοστό είναι μάλλον μικρό, πιστεύουμε πως αποτελεί ένα θέμα που χρειάζεται περαιτέρω διερεύνηση.

Το γενικό συμπέρασμα που προκύπτει από την παραπάνω διερεύνηση των μεθόδων περιγραφής του ΗΕΓ είναι ότι το ΗΕΓ παρουσιάζει μη γραμμικά χαρακτηριστικά, τα οποία είναι εντονότερα στην περίπτωση του μη φυσιολογικού, επιληπτικού ΗΕΓ. Για το σκοπό αυτό η μελέτη του ΗΕΓ με χρήση μη γραμμικών τεχνικών κρίνεται απαραίτητη. Έτσι, στο επόμενο κεφάλαιο αναπτύσσουμε μία μέθοδο ταυτοποίησης μη γραμμικών καταχωρητών ολίσθησης με ανάδραση.

Κεφάλαιο 9

Μη Γραμμικοί Καταχωρητές Ολίσθησης Με Ανάδραση

9.1 Γενικά

Η χρησιμοποίηση μη γραμμικών μοντέλων για την περιγραφή χρονοσειρών περιλαμβάνει ένα μεγάλο εύρος εφαρμογών [8], [137]. Η περιγραφή χαοτικών συστημάτων, η επεξεργασία βιοσημάτων, η ανάλυση χρονοσειρών οικονομικών δεδομένων, οι εφαρμογές επικοινωνιακών συστημάτων αποτελούν μερικές από αυτές. Τα μη γραμμικά μοντέλα μπορούν επίσης να αποτελέσουν εργαλεία σχεδίασης ισχυρών σχημάτων κρυπτογράφησης ή υλοποίησης ψευδοτυχαίων μη γραμμικών γεννητριών. Τα συστήματα Volterra, τα μη γραμμικά αυτοπαλινδρούμενα μοντέλα και τα νευρωνικά δίκτυα συγκαταλλέγονται μεταξύ των πιο δημοφιλών μη γραμμικών μεθόδων που χρησιμοποιούνται [60]. Στη συνέχεια εστιάζομαστε στα μη γραμμικά αυτοπαλινδρούμενα μοντέλα που μπορούν να παράγουν ακριβώς μια δεδομένη ακολουθία με τιμές σε ένα σώμα F . Εάν το F είναι πεπερασμένο, τότε το αυτοπαλινδρούμενο μοντέλο ταυτίζεται με ένα μη γραμμικό καταχωρητή ολίσθησης με ανάδραση (NLFSR: Nonlinear Feedback Shift Register). Για τον προσδιορισμό του NLFSR ελαχίστου κόστους αναπτύξαμε δύο αλγόριθμους: έναν τύπου μπλοκ και ένα σειριακό [75]. Οι προτεινόμενες μέθοδοι συνδυάζουν τρία συστατικά:

- μία ολική διάταξη
- έναν έλεγχο γραμμικής εξάρτησης
- έναν έλεγχο ελαχίστου

Η ολική διάταξη διευκολύνει την αποτίμηση του NLFSR. Επιβάλλεται από το γεγονός ότι κάθε NLFSR χαρακτηρίζεται από έναν πολυδείκτη που αντιπροσωπεύει την τάξη μη γραμμικότητας, τα κύρια γινόμενα σημάτων που καλούνται πρωταρχικά σήματα και τις μέγιστες καθυστερήσεις. Η προτεινόμενη ολική διάταξη είναι ουσιαστικά μια ολικού βαθμού διάταξη επαυξημένη με μια συνάρτηση κόστους που αντιπροσωπεύει το κόστος υλοποίησης. Οι συντελεστές ενός NLFSR που παράγει το δεδομένο σήμα ανήκουν στο μηδενικό χώρο ενός κατάλληλου πίνακα. Επομένως κάθε NLFSR αντιστοιχεί στην έκφραση μιας στήλης του πίνακα αυτού ως γραμμικού συνδυασμού των προηγούμενων στηλών. Ένα ειδικό χαρακτηριστικό του υπό εξέταση προβλήματος είναι ότι τα μήκη των στηλών του προαναφερθέντος πίνακα δεν είναι τα ίδια. Το στοιχείο αυτό απαιτεί μια περισσότερο προσεκτική ανάλυση της γραμμικής εξάρτησης. Ο έλεγχος γραμμικής εξάρτησης που χρησιμοποιήθηκε επιτυγχάνει τον προηγούμενο στόχο με τη διαχείριση υπομπλόκ των στηλών και την κατάλληλη προσαρμογή του αλγορίθμου FIA (Fundamental Iterative Algorithm) [35]. Το τρίτο συστατικό του αλγορίθμου προσαρμόζει τον έλεγχο γραμμικής εξάρτησης με την ολική

διάταξη. Με αυτόν τον τρόπο προσδιορίζεται τελικώς ο NLFSR που είναι ελάχιστος ως προς την ολική διάταξη.

Η σύνθεση του ελάχιστου γραμμικού καταχωρητή ολίσθησης με ανάδραση αποτελεί ειδική περίπτωση του μη γραμμικού φορμαλισμού. Στη γραμμική περίπτωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο δημοφιλής αλγόριθμος των Berlekamp-Massey [10], [11], [83] και οι επεκτάσεις του [35], [55], [107], [108]. Ο αλγόριθμος των Berlekamp-Massey είναι μια αποτελεσματική αναδρομική μέθοδος εύρεσης του ελάχιστου μήκους γραμμικού καταχωρητή ολίσθησης με ανάδραση (LFSR: Linear Feedback Shift Register) που παράγει μια δεδομένη ακολουθία στοιχείων ενός σώματος. Μερικά από τα βασικά χαρακτηριστικά του αλγορίθμου των Berlekamp-Massey περιλαμβάνονται επίσης στις προτεινόμενες μεθόδους. Για παράδειγμα, και το μπλοκ σχήμα και το σειριακό σχήμα χαρακτηρίζονται από το σφάλμα του ισχύοντος NLFSR, ενώ η απαιτούμενη αλλαγή του μήκους του καταχωρητή βασίζεται στους καταχωρητές με τις πιο πρόσφατες τροποποιήσεις μήκους. Η ανάγκη εισαγωγής μη γραμμικών όρων προκύπτει όταν το σήμα παράγεται από μια μη γραμμική πηγή. Σε ένα πεπερασμένο σώμα μια πεπερασμένη ακολουθία μπορεί να παραχθεί από έναν LFSR με κόστος την αύξηση της πολυπλοκότητας. Ταυτοποίηση του μη γραμμικού γεννήτορα μειώνει δραστικά τις απαιτούμενες πράξεις.

9.2 Κανονική Αναπαράσταση

Θεωρούμε τις ακολουθίες $x(n)$, $1 \leq n \leq N$ που παράγονται από την ακόλουθη μη γραμμική πηγή:

$$\begin{aligned}
 x(n) = & \sum_{i=1}^L c_i x(n-i) + \sum_{i_1=0}^{p_{22}} \sum_{i=1}^{L_{i_1}} c_{i,i_1} x(n-i) x(n-i-i_1) + \\
 & + \sum_{i_1=0}^{p_{32}} \sum_{i_2=0}^{p_{33}-i_1} \sum_{i=1}^{L_{i_1,i_2}} c_{i,i_1,i_2} x(n-i) x(n-i-i_1) x(n-i-i_1-i_2) + \dots + \\
 & + \sum_{i_1=0}^{p_{k2}} \sum_{i_2=0}^{p_{k3}-i_1} \dots \sum_{i_{k-1}=0}^{p_{kk}-\sum_{l=1}^{k-2} i_l} \sum_{i=1}^{L_{i_1,i_2,\dots,i_{k-1}}} c_{i,i_1,\dots,i_{k-1}} x(n-i) \cdot \\
 & \cdot \prod_{j=1}^{k-1} x(n-i-\sum_{w=1}^j i_w), \quad n > M
 \end{aligned} \tag{9.1}$$

Στην παραπάνω εξίσωση (9.1) που καλείται κανονική αναπαράσταση, η παράμετρος k συμβολίζει την τάξη της μέγιστης μη γραμμικότητας. Το γραμμικό μέρος χαρακτηρίζεται από την τάξη L και τους αντίστοιχους συντελεστές c_i , $1 \leq i \leq L$. Το δεύτερης τάξης μέρος της εξίσωσης (9.1) παραμετροποιείται από τις τάξεις p_{22} και L_{i_1} , $0 \leq i_1 \leq p_{22}$ καθώς και τους δεύτερης τάξης συντελεστές c_{i,i_1} , $1 \leq i \leq L_{i_1}$, $0 \leq i_1 \leq p_{22}$. Οι υψηλότερης τάξης όροι ορίζονται με όμοιο τρόπο και ισχύει $p_{m2} \leq p_{m3} \leq \dots \leq p_{mm}$, $3 \leq m \leq k$. Οι παράμετροι $L, L_{i_1}, \dots, p_{22}, p_{32}, \dots$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Οι συντελεστές $c_i, c_{i,i_1}, \dots, c_{i,i_1,\dots,i_{k-1}}$ και οι προκύπτουσες τιμές του σήματος $x(n)$ ανήκουν σε ένα σώμα F . Το σώμα F θα μπορούσε να είναι το σώμα των πραγματικών αριθμών, το σώμα των μιγαδικών αριθμών ή ένα πεπερασμένο σώμα. Οι προσθέσεις και οι πολλαπλασιασμοί που εμφανίζονται στην εξίσωση (9.1) είναι οι αντίστοιχες πράξεις στο σώμα F . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, στη συνέχεια θα αναφερόμαστε σε πεπερασμένα σώματα. Τέλος, η παράμετρος M σχετίζεται με το μήκος των αρχικών συνθηκών του καταχωρητή NLFSR και προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$M = \max\{L, M_m\}, \quad 2 \leq m \leq k, \quad M_m = \max\{L_{i_1,i_2,\dots,i_{m-1}} + \sum_{w=1}^j i_w\} \tag{9.2}$$



Σχήμα 9.1: Η γενική αρχιτεκτονική NLFSR καταχωρητών που βασίζεται στην κανονική αναπαράσταση

όπου $1 \leq j \leq m-1, 0 \leq i_1 \leq p_{m2}, 0 \leq i_2 \leq p_{m3} - i_1, \dots, 0 \leq i_{m-1} \leq p_{mm} - \sum_{l=1}^{m-2} i_l$. Πρέπει να σημειωθεί ότι η εξίσωση (9.1) ορίζει μια αναδρομικά υπολογιζόμενη έκφραση. Αυτό δε θα μπορούσε να συμβεί εάν ο δείκτης i επιτρεπόταν να λάβει μη θετικές τιμές.

Η εξίσωση (9.1) αποκαλύπτει την ιδιότητα του αναλλοιώτου ολισθήσης των γινομένων των σημάτων. Πραγματικά, τα δεδομένα που σχετίζονται με το γραμμικό μέρος αποτελούν χρονικές ολισθήσεις του σήματος $x(n)$. Οι όροι που περιλαμβάνονται στο δεύτερης τάξης μέρος είναι χρονικές ολισθήσεις των σημάτων $x(n-1) \cdot x(n-1-i_1), 0 \leq i_1 \leq p_{22}$, κ.ο.κ. Επομένως το σήμα εξόδου $x(n)$ λαμβάνεται ουσιαστικά από ένα γραμμικό συνδυασμό ολισθημένων αντιγράφων ενός συνόλου από σήματα που καλούνται πρωταρχικά σήματα [43]. Το πλήθος των πρωταρχικών σημάτων που σχετίζονται με μια συγκεκριμένη μη γραμμικότητα τάξης m προσδιορίζονται από τις παραμέτρους $\{p_{ml}\}, l = 2, \dots, m$, ενώ οι ολισθήσεις που συμπεριλαμβάνονται σε ένα συγκεκριμένο πρωταρχικό σήμα που καθορίζεται από τους δείκτες i_1, i_2, \dots, i_{m-1} δηλώνεται από την παράμετρο $L_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}}$. Για παράδειγμα, για τη δεύτερης τάξης μη γραμμικότητα υπάρχουν $p_{22} + 1$ πρωταρχικά σήματα της μορφής $x(n-1)x(n-1-i_1)$, καθένα από τα οποία περιλαμβάνει L_{i_1} ολισθήσεις. Κατά σύμβαση η ισότητα $L_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}} = 0$ δηλώνει την απουσία του αντίστοιχου πρωταρχικού σήματος. Οι δομικές παράμετροι της εξίσωσης (9.1) σχηματίζουν το διάνυσμα:

$$u = (k, r(k), S(k, r(k))) \quad (9.3)$$

όπου

$$r(k) = [p_{22} \mid p_{32} \ p_{33} \mid \dots \mid p_{k2} \ \dots \ p_{kk}] \quad (9.4)$$

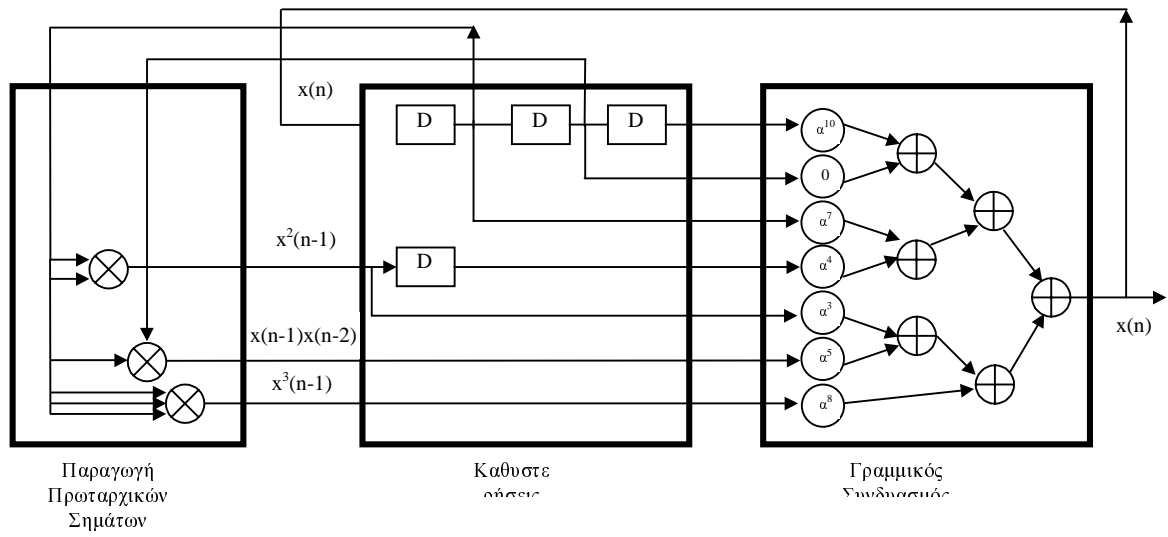
$$S(k, r(k)) = [L \mid L_0 \ \dots \ L_{p_{22}} \mid L_{0,0} \ \dots \ L_{p_{32}, p_{33}-p_{32}} \mid \dots \mid L_{0,0,\dots,0} \ \dots] \quad (9.5)$$

Η κανονική αναπαράσταση μπορεί κατευθείαν να υλοποιηθεί στην αρχιτεκτονική που εικονίζεται στο Σχήμα 9.1. Η αρχιτεκτονική αυτή αποτελείται από τρία κύρια δομικά τμήματα: το τμήμα δημιουργίας των πρωταρχικών σημάτων, το τμήμα των καθυστερήσεων και το τμήμα των πολλαπλασιαστών και αθροιστών. Το πρώτο τμήμα παράγει τα πρωταρχικά σήματα. Δέχεται ως είσοδο τις καθυστερήσεις του σήματος $x(n)$ και απαιτεί τη χρήση πολλαπλασιαστών για τη δημιουργία των πρωταρχικών σημάτων. Το δεύτερο τμήμα περιλαμβάνει μία δομή καθυστερήσεων για κάθε πρωταρχικό σήμα, η οποία παράγει όλα τα απαιτούμενα ολισθημένα γινόμενα που υπάρχουν στην εξίσωση (9.1). Το τρίτο τμήμα περιλαμβάνει τους πολλαπλασιαστές που σχετίζονται με τους συντελεστές c_i, c_{i,i_1}, \dots και τους κατάλληλους αθροιστές που συνδυάζονται για τη δημιουργία του $x(n)$. Το σχήμα υλοποίησης παρουσιάζεται διεξοδικά στο παράδειγμα που ακολουθεί:

Παράδειγμα 1: Σχήμα Υλοποίησης

Ας θεωρήσουμε το μη γραμμικό καταχωρητή ολισθήσης με ανάδραση που περιγράφεται από την εξίσωση:

$$x(n) = a^7 x(n-1) + a^{10} x(n-3) + a^3 [x(n-1)]^2 + a^4 [x(n-2)]^2 + a^5 x(n-1)x(n-2) + a^8 [x(n-1)]^3, \quad n > 3$$



Σχήμα 9.2: Η αρχιτεκτονική του μη γραμμικού καταχωρητή ολίσθησης με ανάδραση του Παραδείγματος 1.

Το a συμβολίζει ένα πρωταρχικό στοιχείο του σώματος $GF(2^4)$. Το διάνυσμα δομής είναι το $u = (3, [1 \ 0 \ 0], [3 \ 2 \ 1 \ 1])$. Το γενικό διάγραμμα του Σχήματος 9.1 λαμβάνει τη μορφή του Σχήματος 9.2. ■

Στη συνέχεια ορίζουμε τα ακόλουθα διανύσματα διαστάσεων $R \times 1$:

$$X_P^R = [x(P+1) \ x(P+2) \ \cdots \ x(P+R)]^T, \quad (9.6)$$

$$X_{P,i_1,\dots,i_{m-1}}^R = \begin{bmatrix} x(P+1)x(P+1-i_1)\cdots x(P+1-\sum_{j=1}^{m-1}i_j) \\ x(P+2)x(P+2-i_1)\cdots x(P+2-\sum_{j=1}^{m-1}i_j) \\ \vdots \\ x(P+R)x(P+R-i_1)\cdots x(P+R-\sum_{j=1}^{m-1}i_j) \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

όπου $2 \leq m \leq k$ και $P \geq 0$. Οι δείκτες i_1, i_2, \dots, i_{m-1} δηλώνουν το αντίστοιχο πρωταρχικό σήμα, ενώ ο δείκτης P καθορίζει το πρώτο στοιχείο των διανυσμάτων. Λόγω του αναλλοιώτου ολίσθησης της εξίσωσης (9.6), για οποιοδήποτε $0 \leq K \leq R$, ισχύει $X_P^R = [[X_P^K]^T \ x(P+K+1) \ \cdots \ x(P+R)]^T$. Το X_P^K αποτελεί το άνω υπομπλόκ του X_P^R με μήκος K . Το διάνυσμα $X_{P,i_1,\dots,i_{m-1}}^R$ διαμερίζεται με παρόμοιο τρόπο.

Η εξίσωση (9.1) είναι μη γραμμική ως προς το $x(n)$ αλλά είναι γραμμική ως προς τους αγνώστους συντελεστές $\{c_{i,i_1,i_2,\dots,i_{m-1}}\}$. Μαζεύοντας όλα τα δείγματα του σήματος $x(n)$, $M < n \leq N$ και θέτοντας $c_0 = -1$, γράφουμε την εξίσωση (9.1) σε διανυσματική μορφή ως εξής:

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{i=0}^L c_i X_{M-i}^{N-M} + \sum_{i_1=0}^{p_{22}} \sum_{i=1}^{L_{i_1}} c_{i,i_1} X_{M-i,i_1}^{N-M} + \\ & + \sum_{i_1=0}^{p_{32}} \sum_{i_2=0}^{p_{33}-i_1} \sum_{i=1}^{L_{i_1,i_2}} c_{i,i_1,i_2} X_{M-i,i_1,i_2}^{N-M} + \cdots + \\ & + \sum_{i_1=0}^{p_{k2}} \sum_{i_2=0}^{p_{k3}-i_1} \cdots \sum_{i_{k-1}=0}^{p_{kk}-\sum_{l=1}^{k-2}i_l} \sum_{i=1}^{L_{i_1,i_2,\dots,i_{k-1}}} c_{i,i_1,\dots,i_{k-1}} X_{M-i,i_1,i_2,\dots,i_{k-1}}^{N-M} \end{aligned} \quad (9.8)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων ως εξής:

$$T_1(u) \cdot C = 0 \quad (9.9)$$

όπου ο $(N - M) \times Q$ πίνακας $T_1(u)$ και το $Q \times 1$ διάνυσμα-στήλη C ορίζονται ως:

$$T_1(u) = [X_{M-L}^{N-M} \ X_{M-L+1}^{N-M} \ \cdots \ X_M^{N-M} \ X_{M-L_0,0}^{N-M} \ X_{M-L_0+1,0}^{N-M} \ \cdots \ X_{M-L_0,0,0}^{N-M} \ \cdots] \quad (9.10)$$

$$C = [c_L \ c_{L-1} \ \cdots \ c_0 \ c_{L_0,0} \ c_{L_0-1,0} \ \cdots \ c_{L_0,0,0} \ \cdots]^T \quad (9.11)$$

Η παράμετρος Q δηλώνει τον αριθμό των στηλών που περιλαμβάνονται στην εξίσωση (9.8). Είναι σαφές ότι το u (βλέπε εξίσωση (9.3)) ελέγχει το μέγεθος του $T_1(u)$. Επομένως για δύο διαφορετικά διανύσματα u και \bar{u} οι αντίστοιχοι πίνακες $T_1(u)$ και $T_1(\bar{u})$ έχουν διαφορετικό αριθμό γραμμών και στηλών. Είναι χρήσιμο για την ανάπτυξη που θα ακολουθήσει η εναρμόνιση των μηκών των στηλών. Για το λόγο αυτό επεκτείνουμε τον πίνακα $T_1(u)$ στον

$$T(u) = [X_{M-L}^N \ X_{M-L+1}^N \ \cdots \ X_M^N \ X_{M-L_0,0}^N \ X_{M-L_0+1,0}^N \ \cdots \ X_{M-L_0,0,0}^N \ \cdots] \quad (9.12)$$

όπου οι τιμές του σήματος $x(n)$ που βρίσκονται εκτός του διαστήματος $1 \leq n \leq N$ λαμβάνονται αυθαίρετα, συμβολίζονται με \star και αναφέρονται ως αδιάφορες εισόδους.

Συνοψίζοντας, κάθε κανονική αναπαράσταση (9.1) αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα δομής (9.3), έναν αντίστοιχο πίνακα $T_1(u)$ και ένα διάνυσμα συντελεστών C με $c_0 = -1$ (βλέπε εξισώσεις (9.10), (9.11)), έτσι ώστε να ισχύει η εξίσωση (9.9). Αντίστροφα, ένα διάνυσμα δομής της μορφής (9.3) και μια μη μηδενική λύση της εξίσωσης (9.9) C , οδηγούν σε μια κανονική αναπαράσταση (9.1), εάν το C παράγει μια έκφραση που υπολογίζεται αναδρομικά. Το τελευταίο σημαίνει ότι το γραμμικό υπομπλόκ του C είναι μη μηδενικό. Επιπρόσθετα, εάν K_0 είναι το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο τότε $c_{i,i_1,i_2,\dots,i_{m-1}} = 0$ για όλα τα i_1, i_2, \dots, i_{m-1} , $i \leq K_0$, $2 \leq m \leq k$. Η συνθήκη αυτή μας επιτρέπει να επιλύσουμε ως προς το $c_{K_0} X_{M-K_0}^{N-M}$ και εγγυάται ότι το προκύπτον δεξί μέλος έχει αιτιατή μορφή. Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με το ομογενές γραμμικό σύστημα (9.9) και θα αναζητήσουμε λύσεις που οδηγούν σε αρχιτεκτονικές που υπολογίζονται αναδρομικά και ταυτόχρονα είναι ελάχιστες υπό την έννοια που περιγράφεται παρακάτω.

9.3 Ολική διάταξη κανονικών μορφών

Στην ενότητα αυτή ορίζεται μια ολική διάταξη στο σύνολο των διανυσμάτων δομής $u = (k, r(k), S(k, r(k)))$. Η διάταξη αυτή μας επιτρέπει να αποτιμήσουμε τις αντίστοιχες αρχιτεκτονικές. Εστω $V(u)$ μια πραγματική συνάρτηση, $V(u) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{R}$. Η $V(u)$ αντιπροσωπεύει το κόστος υλοποίησης που σχετίζεται με την αρχιτεκτονική που αντιστοιχεί στο u . Ονομάζουμε τη συνάρτηση αυτή συνάρτηση διάταξης. Το σύνολο \mathcal{A} περικλείει όλες τις εκ των προτέρων πληροφορίες για τα διανύσματα δομής u . Εστω

$$B(u) = \left[1 \ \sum_{i_1} f_s(L_{i_1}) \ \cdots \ \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_{k-1}} f_s(L_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}) \right]^T \quad (9.13)$$

$$Q(u) = \left[L+1 \ \sum_{i_1} L_{i_1} \ \cdots \ \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_{k-1}} L_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}} \right]^T \quad (9.14)$$

όπου το $f_s(n)$ ισούται με μηδέν για $n \leq 0$, διαφορετικά ισούται με 1. Εάν $f_s(L_{i_1, \dots, i_{m-1}}) = 0$, τότε το αντίστοιχο πρωταρχικό σήμα απουσιάζει. Με δεδομένο το k , η i -οστή συνιστώσα του $B(u)$ παρέχει τον αριθμό των πρωταρχικών σημάτων που αντιστοιχούν στην τάξη i . Παρόμοια οι συνιστώσες του $Q(u)$ περιγράφουν τις καθυστερήσεις των πρωταρχικών σημάτων. Η διάταξη συμβολίζεται με $<_V$ και ορίζεται ως ακολούθως:

Έστω $u_1 = (k_1, r_1(k_1), S_1(k_1, r_1(k_1)))$, $u_2 = (k_2, r_2(k_2), S_2(k_2, r_2(k_2))) \in \mathcal{A}$. Τότε

$$u_1 <_V u_2 \text{ εάν και μόνο εάν ισχύει ένα από τα ακόλουθα :} \quad (9.15)$$

1. $V(u_1) < V(u_2)$
2. $V(u_1) = V(u_2)$ και $k_1 < k_2$
3. $V(u_1) = V(u_2)$, $k_1 = k_2$ και $\mathcal{B}(u_1) <_T \mathcal{B}(u_2)$
4. $V(u_1) = V(u_2)$, $k_1 = k_2$, $\mathcal{B}(u_1) = \mathcal{B}(u_2)$ και $r_1(k_1) <_T r_2(k_2)$
5. $V(u_1) = V(u_2)$, $k_1 = k_2$, $\mathcal{B}(u_1) = \mathcal{B}(u_2)$, $r_1(k_1) = r_2(k_2)$ και $\mathcal{Q}(u_1) <_T \mathcal{Q}(u_2)$
6. $V(u_1) = V(u_2)$, $k_1 = k_2$, $\mathcal{B}(u_1) = \mathcal{B}(u_2)$, $r_1(k_1) = r_2(k_2)$, $\mathcal{Q}(u_1) = \mathcal{Q}(u_2)$ και $S(k_1, r_1(k_1)) <_T S(k_2, r_2(k_2))$

όπου η ολικού βαθμού διάταξη μεταξύ δύο $m \times 1$ διανυσμάτων p και q ορίζεται από τη σχέση [108]:

$$[p_1 \ \cdots \ p_i \ \cdots \ p_m] <_T [q_1 \ \cdots \ q_i \ \cdots \ q_m] \text{ εάν και μόνο εάν } \sum_{1 \leq i \leq m} p_i < \sum_{1 \leq i \leq m} q_i$$

$$\text{ή } \left(\sum_{1 \leq i \leq m} p_i = \sum_{1 \leq i \leq m} q_i \right) \wedge (\exists i) ((1 \leq i \leq m) \wedge (p_i < q_i, p_{i+1} = q_{i+1}, \dots, p_m = q_m))$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό η διάταξη $<_V$ βασίζεται κύρια στη συνάρτηση κόστους $V(u)$. Για υλοποιήσεις ίσου κόστους, η διάταξη $<_V$ βασίζεται στην τάξη της μη γραμμικότητας. Εάν εξακολουθεί η ισότητα, η διάταξη $<_V$ βασίζεται στο πλήθος των πρωταρχικών σημάτων ή στο πλήθος των καθυστερήσεων.

Πρόταση 1:

Η διάταξη που ορίζεται από την (9.15) είναι ολική.

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $u, u' \in \mathcal{A}$ με $u \neq u'$, τέτοια ώστε να μην ισχύει ούτε η σχέση $u <_V u'$ ούτε η $u' <_V u$. Αυτό υπονοεί ότι $V(u) = V(u')$. Τότε, τουλάχιστον ένα από τα ακόλουθα είναι αληθές:

$$k \neq k' \text{ ή } r(k) \neq r'(k') \text{ ή } S(k, r(k)) \neq S'(k', r'(k'))$$

Εάν ισχύει $k \neq k'$, τότε από την (9.15) παίρνουμε ότι $u <_V u'$ ή $u' <_V u$, άτοπο. Εστω τώρα ότι ισχύει $k = k'$ και $r(k) \neq r'(k')$. Υπάρχουν (i, j) , $2 \leq i, j \leq k$, $i \geq j$ τέτοια ώστε $p_{ij} \neq p'_{ij}$. Επομένως από την (9.15) συμπεραίνουμε ότι $u <_V u'$ ή $u' <_V u$, άτοπο. Τέλος, ας υποθέσουμε ότι $k = k'$, $r(k) = r'(k')$, $S(k, r(k)) \neq S'(k', r'(k'))$. Τότε για κάποια i_1, i_2, \dots, i_{m-1} , $2 \leq m \leq k$, ισχύει ότι $L_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}} \neq L'_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}}$. Επομένως η (9.15) οδηγεί σε άτοπο. ■

9.3.1 Η συνάρτηση διάταξης

Η ακριβής έκφραση της συνάρτησης διάταξης εξαρτάται από την αρχιτεκτονική που υιοθετείται για την υλοποίηση των NLFSR καθώς και από τα κριτήρια με βάση τα οποία αξιολογείται το κόστος υλοποίησης. Γενικά, η $V(u)$ μπορεί να οριστεί ως το ελάχιστο από όλα τα δυνατά κόστη υλοποίησης του u , κάτι που σημαίνει ότι για κάθε u χρησιμοποιείται η καλύτερη (σύμφωνα με δεδομένο κριτήριο) υλοποίηση του πολυωνύμου ανάδρασης. Αυτό υπονοεί ότι για δεδομένο u αποτιμούνται όλες οι δυνατές υλοποιήσεις, σύμφωνα με το δεδομένο κριτήριο, και επιλέγεται αυτή με το ελάχιστο κόστος. Ωστόσο, λόγω της πολυπλοκότητας της διαδικασίας που περιγράφηκε, μπορούμε να υιοθετήσουμε ένα συγκεκριμένο σχήμα αρχιτεκτονικής, όπως για παράδειγμα το σχήμα που βασίζεται στα πρωταρχικά σήματα που περιγράφηκαν σε προηγούμενη ενότητα. Το κόστος υλοποίησης μπορεί να αποτιμηθεί ως το άθροισμα του κόστους των αθροιστών, των πολλαπλασιαστών

και των μονάδων καθυστέρησης ή ως η συνολική επιφάνεια που χρησιμοποιείται όταν ο NLFSR υλοποιείται ως ολοκληρωμένο κύκλωμα. Η συνάρτηση $V(u)$ έχει την ιδιότητα ότι η προσθήκη καθυστερητών ή η εισαγωγή νέων πρωταρχικών σημάτων αυξάνει το κόστος του καταχωρητή. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η συνάρτηση $V(u)$ αναπαριστά το κόστος υλοποίησης που σχετίζεται με την αρχιτεκτονική του Σχήματος 9.1. Η $V(u)$ συμπεριλαμβάνει το κόστος δημιουργίας των πρωταρχικών σημάτων, το κόστος των καθυστερήσεων, το κόστος των πολλαπλασιαστών και το κόστος των αθροιστών. Ας συμβολίσουμε με $\gamma_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}}$ το κόστος των πολλαπλασιαστών που απαιτούνται για τη δημιουργία του αντίστοιχου πρωταρχικού σήματος και με $\gamma_D, \gamma_S, \gamma_A$ το κόστος ενός καθυστερητή, ενός πολλαπλασιαστή και ενός αθροιστή, αντίστοιχα. Τότε, η απευθείας υλοποίηση του Σχήματος 9.1 έχει το ακόλουθο κόστος:

$$\begin{aligned} V(u) = & \left(L + \sum_{m=2}^k \sum_{i_1=0}^{p_{m2}} \sum_{i_2=0}^{p_{m3}-i_1} \cdots \sum_{i_{m-1}=0}^{p_{mm}-\sum_{w=1}^{m-2} i_w} f_s(L_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}}) \cdot (L_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}} - 1) \right) \cdot \gamma_D + \\ & + \sum_{m=2}^k \sum_{i_1=0}^{p_{m2}} \sum_{i_2=0}^{p_{m3}-i_1} \cdots \sum_{i_{m-1}=0}^{p_{mm}-\sum_{w=1}^{m-2} i_w} f_s(L_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}}) \cdot \gamma_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}} + f_s(M_p - L) \cdot (M_p - L) \cdot \gamma_D + \\ & + \left(L + \sum_{m=2}^k \sum_{i_1=0}^{p_{m2}} \sum_{i_2=0}^{p_{m3}-i_1} \sum_{i_{m-1}=0}^{p_{mm}-\sum_{w=1}^{m-2} i_w} L_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}} \right) \cdot (\gamma_S + \gamma_A) - \gamma_A \end{aligned} \quad (9.16)$$

όπου ο όρος $f_s(M_p - L) \cdot (M_p - L) \cdot \gamma_D$, $M_p = \max\{p_{mm} + 1, 2 \leq m \leq k\}$ εκφράζει τον πρόσθετο αριθμό καθυστερήσεων του $x(n)$ που απαιτούνται για τη δημιουργία των πρωταρχικών σημάτων. Σημειώνεται ότι τα πραγματικά κόσστη εξαρτώνται από τα πραγματικά πλαίσια στα οποία η αρχιτεκτονική του Σχήματος 9.1 υλοποιείται. Διαφορετικές υλοποιήσεις οδηγούν σε διαφορετικές συναρτήσεις κόστους. Εστω ότι το $\gamma_{i_1} = g_2$ ορίζει το κόστος ενός πολλαπλασιαστή δύο στοιχείων. Ας υποθέσουμε ότι το κόστος υλοποίησης ενός γινομένου βαθμού m δίνεται από τη σχέση $\gamma_{i_1, \dots, i_{m-1}} = (m-1)g_2$, $2 \leq m \leq k$ και επίσης ότι $g = \gamma_D + \gamma_S + \gamma_A$. Τότε, λαμβάνοντας υπόψη το πλήθος των στηλών Q που ισούται με την l_1 -νόρμα του διανύσματος $\mathcal{Q}(k, r(k))$, η εξίσωση (9.16) απλοποιείται στην ακόλουθη έκφραση:

$$\begin{aligned} V(u) = & (Q-1) \cdot g + f_s(M_p - L) \cdot (M_p - L) \cdot \gamma_D - \\ & - \sum_{m=2}^k \sum_{i_1=0}^{p_{m2}} \sum_{i_2=0}^{p_{m3}-i_1} \cdots \sum_{i_{m-1}=0}^{p_{mm}-\sum_{w=1}^{m-2} i_w} f_s(L_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}}) \cdot \gamma_D + \\ & + \sum_{m=2}^k \sum_{i_1=0}^{p_{m2}} \sum_{i_2=0}^{p_{m3}-i_1} \cdots \sum_{i_{m-1}=0}^{p_{mm}-\sum_{w=1}^{m-2} i_w} f_s(L_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}}) \cdot (m-1) \cdot g_2 - \gamma_A \end{aligned} \quad (9.17)$$

Παράδειγμα 2 : Σύστημα Hammerstein

Η ειδική περίπτωση της εξίσωσης (9.1)

$$x(n) = \sum_{i=1}^L c_i x(n-i) + \sum_{i=1}^{L_0} c_{i,0} [x(n-i)]^2$$

ορίζει ένα μοντέλο Hammerstein. Στην περίπτωση αυτή το διάνυσμα δομής u χαρακτηρίζεται μόνο από τις παραμέτρους k, L και L_0 . Πραγματικά, είναι $k = 1$ ή $k = 2$, $r(1) = \emptyset$, $r(2) = (p_{22}) = (0)$, $S(1, r(1)) = (L)$, $S(2, r(2)) = (L, L_0)$. Επομένως, το σύνολο \mathcal{A} αποτελείται από διανύσματα της μορφής $(1, L)$ ή $(2, L, L_0)$. Ο πίνακας 9.1 παρουσιάζει τη διάταξη κόστους που προκύπτει για

Πίνακας 9.1: Ολική διάταξη κόστους για την περίπτωση του παραδείγματος 2

την περίπτωση όπου $g_2 = 0.6g$, $\gamma_A = 0.2g$, $\gamma_D = 0.5g$, $\gamma_s = 0.3g$ και οι καθυστερήσεις είναι τέτοιες ώστε να παρουσιάζουν $\max\{L + L_0\} = 6$.

i	u_i	$V(u_i)(g)$	i	u_i	$V(u_i)(g)$	i	u_i	$V(u_i)(g)$	i	u_i	$V(u_i)(g)$
1	(1,1)	0.8	8	(2,1,2)	2.9	15	(1,5)	4.8	22	(2,5,1)	5.9
2	(2,0,1)	1.4	9	(2,0,3)	3.4	16	(2,4,1)	4.9	23	(2,4,2)	5.9
3	(1,2)	1.8	10	(1,4)	3.8	17	(2,3,2)	4.9	24	(2,3,3)	5.9
4	(2,1,1)	1.9	11	(2,3,1)	3.9	18	(2,2,3)	4.9	25	(2,2,4)	5.9
5	(2,0,2)	2.4	12	(2,2,2)	3.9	19	(2,1,4)	4.9	26	(2,1,5)	5.9
6	(1,3)	2.8	13	(2,1,3)	3.9	20	(2,0,5)	5.4	27	(2,0,6)	6.4
7	(2,2,1)	2.9	14	(2,0,4)	4.4	21	(1,6)	5.8	\vdots	\vdots	\vdots

Σημειώνουμε την ύπαρξη διανυσμάτων u που παρουσιάζουν το ίδιο κόστος. Η διάταξη των διανυσμάτων αυτών βασίζεται στο πλήθος των καθυστερήσεων, όπως επιβάλλεται από την (9.15).

■

9.3.2 Διατύπωση Προβλήματος

Το εξεταζόμενο πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: Δεδομένης μιας ακολουθίας $\{x(n)\}$ μήκους N στο σώμα F , ενός συνόλου περιορισμών και μιας συνάρτησης κόστους V , να βρεθεί το διάνυσμα δομής $u = (k, r(k), S(k, r(k))) \in \mathcal{A}$ και το διάνυσμα των αντίστοιχων συντελεστών C έτσι ώστε η $x(n)$ να παράγεται από την αρχιτεκτονική που αντιστοιχεί στα u και C και ταυτόχρονα η αρχιτεκτονική αυτή να είναι η ελάχιστη ως προς τη διάταξη $<_V$. Με ακριβείς όρους, αναζητούμε $u = (k, r(k), S(k, r(k))) \in \mathcal{A}$ και $C \neq 0$ τέτοιο ώστε $T_1(u) \cdot C = 0$, όπου το C υπολογίζεται αναδρομικά και για όλα τα $u' \in \mathcal{A}$ με $u' <_V u$ δεν υπάρχει κανένα αναδρομικά υπολογιζόμενο $C' \neq 0$ τέτοιο ώστε $T_1(u') \cdot C' = 0$.

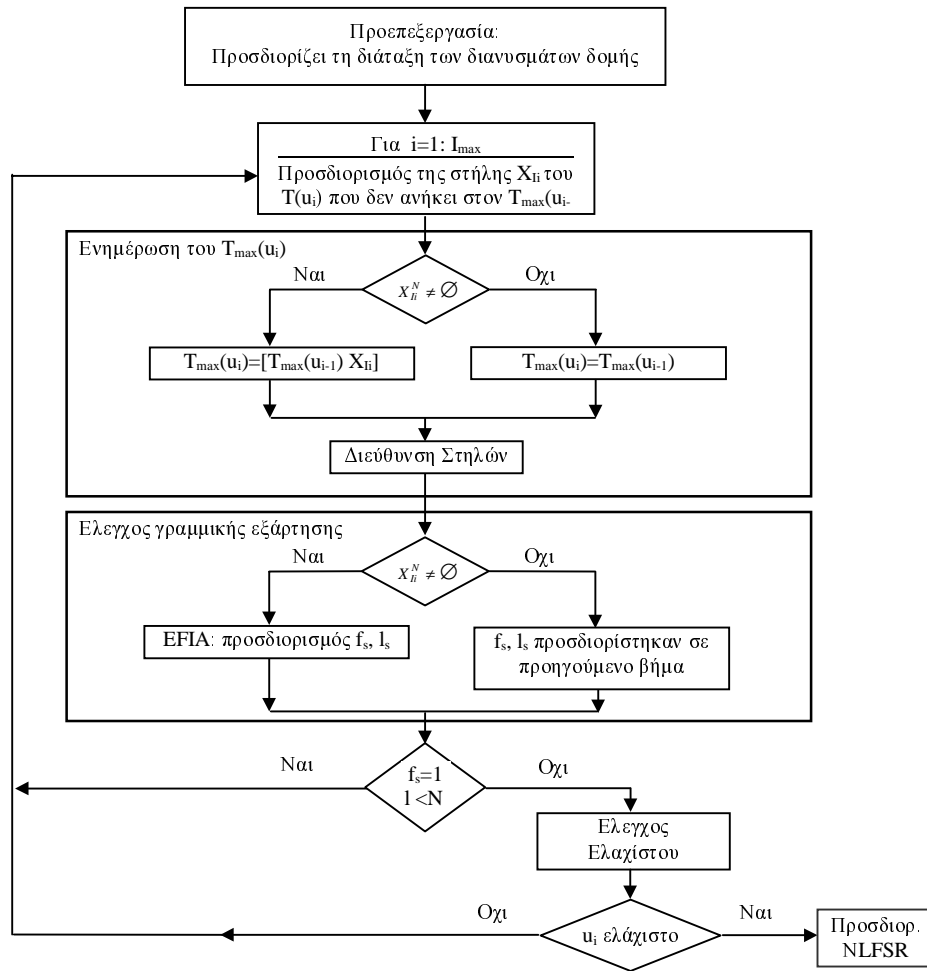
Εξετάζουμε επίσης τη διατύπωση του σειριακού αντιστοίχου προβλήματος στην ενότητα 9.5. Το σειριακό πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: Ας υποθέσουμε ότι το u είναι το ελάχιστο διάνυσμα δομής ως προς τη διάταξη $<_V$ που παράγει τη δεδομένη ακολουθία $x(n)$, $n = 1, \dots, N$. Δεδομένου του επομένου όρου $x(N+1)$ να βρεθεί το ελάχιστο διάνυσμα δομής ως προς τη διάταξη $<_V$ που παράγει την ακολουθία $x(n)$, $n = 1, \dots, N, N+1$.

Μια πρώτη προσέγγιση για την αντιμετώπιση του προβλήματος είναι η εξαντλητική αναζήτηση. Πραγματικά, ας διατάζουμε τα διανύσματα δομής ως εξής:

$$u_1 <_V u_2 <_V u_3 <_V \dots <_V u_i <_V u_{i+1} <_V \dots \quad (9.18)$$

Τότε με τη μέθοδο της εξαντλητικής αναζήτησης κατασκευάζουμε διαδοχικά τους πίνακες $T_1(u_i)$ και ελέγχουμε εάν υπάρχουν αναδρομικά υπολογιζόμενα $C \neq 0$ τέτοια ώστε $T_1(u_i) \cdot C = 0$. Το σχήμα αυτό περιλαμβάνει έναν τεράστιο αριθμό υπολογισμών αφού η διαδικασία για τη γραμμική εξάρτηση επαναλαμβάνεται για κάθε $T_1(u_i)$. Ο ενδογενής πλεονασμός των υπολογισμών οφείλεται στο γεγονός ότι για κάθε u_i και για όλα τα $u_j <_V u_i$, οι πίνακες $T(u_i)$ και $T(u_j)$ μοιράζονται από κοινού αρκετές στήλες. Μια προσέγγιση για την απαλλαγή του πλεονασμού είναι η αποθήκευση των ενδιάμεσων αποτελεσμάτων και η χρησιμοποίησή τους σε επόμενα βήματα. Ωστόσο, η προσέγγιση αυτή απαιτεί μεγάλο αποθηκευτικό χώρο.

Μια εναλλακτική είναι η εισαγωγή όλων των στηλών των $T(u_j)$, $u_j <_V u_i$ σε έναν πίνακα $T_{\max}(u_i)$, η γραμμική εξάρτηση του οποίου αντανακλά τελικά την εξάρτηση του ελάχιστου $T_1(u)$. Ωστόσο, ο προκύπτων πίνακας περιέχει πολλά αδιάφορα στοιχεία και το θέμα της γραμμικής εξάρτησης απαιτεί κατάλληλες τροποποιήσεις. Υπάρχουν πολλοί αλγόριθμοι [20] διαθέσιμοι για τον



Σχήμα 9.3: Η δομή του προτεινόμενου αλγορίθμου

έλεγχο της γραμμικής εξάρτησης. Στην περίπτωση μας ενδιαφερόμαστε για σειριακό έλεγχο της γραμμικής ανεξαρτησίας και επομένως θα χρησιμοποιήσουμε μια τροποποίηση του Fundamental Iterative Algorithm (FIA) που έχει προταθεί από τους Feng και Tzeng [35] στην προσπάθειά τους να γενικεύσουν τον αλγόριθμο των Berlekamp-Massey για το πρόβλημα των πολλών ακολουθιών.

9.4 Ο Προτεινόμενος Αλγόριθμος

Η οργάνωση του προτεινόμενου αλγοριθμικού σχήματος φαίνεται στο Σχήμα 9.3. Αποτελείται από ένα τμήμα προεπεξεργασίας και το κύριο μέρος του αλγορίθμου. Το τμήμα της προεπεξεργασίας παράγει την ολική διάταξη των διανυσμάτων δομής που περιέχονται στο σύνολο \mathcal{A} . Το τμήμα αυτό δεν εξαρτάται από τη δεδομένη ακολουθία και παρέχει το πλαίσιο εργασίας για το κύριο μέρος του αλγορίθμου. Η υλοποίησή του μπορεί να μη γίνει σε πραγματικό χρόνο.

Το κύριο μέρος του αλγορίθμου περιλαμβάνει τρία τμήματα. Το πρώτο τμήμα κατασκευάζει στήλη προς στήλη έναν πίνακα T_{max} που ακολουθεί τη διάταξη των διανυσμάτων δομής. Το δεύτερο τμήμα προσδιορίζει ένα γραμμικό συνδυασμό (εάν υπάρχει) των στηλών του T_{max} που σχηματίζει μία υποψήφια για ελάχιστη λύση. Το τρίτο μέρος ελέγχει εάν ο γραμμικός συνδυασμός αντιστοιχεί στην ελάχιστη λύση. Πιο συγκεκριμένα, το πρώτο τμήμα ακολουθεί την ολική διάταξη και ενημερώνει τον πίνακα $T_{max}(u_i)$ προσθέτοντας τη στήλη X_{fi}^N (εάν υπάρχει) του $T(u_i)$, η οποία δεν συμπεριλαμβάνεται στον πίνακα $T_{max}(u_{i-1})$. Προσδιορίζονται οι διευθύνσεις όλων των στηλών

του $T(u_i)$ που περιέχονται στον $T_{max}(u_{i-1})$ π.χ. η στήλη $X_{I_i}^N$ διευθυνοδοτείται ως η s -οστή στήλη του $T_{max}(u_i)$. Η διαδικασία αυτή εκτελείται από το μπλοκ διευθυνοδοτήσης στηλών του Σχήματος 9.3. Το δεύτερο τμήμα του κυρίου μέρους του αλγορίθμου υπολογίζει τον ανιχνευτή σφάλματος f_s και το μέγιστο μήκος l_s του άνω υπομπλόκ της στήλης $X_{I_i}^N$ που είναι γραμμικώς εξαρτημένο με τα αντίστοιχα υπομπλόκ των προηγούμενων στηλών του $T_{max}(u_i)$. Εάν όλες οι στήλες του $T(u_i)$ συμπεριλαμβάνονται στον πίνακα $T_{max}(u_{i-1})$, τα χαρακτηριστικά τους f_s και l_s έχουν ήδη υπολογιστεί σε κάποιο προηγούμενο βήμα. Εάν για τη στήλη $X_{I_i}^N$ ισχύει ότι $f_s = 1$ και $l_s < N_i$ (ο όρος $X_{I_i}^{N_i}$ δηλώνει το άνω υπομπλόκ της στήλης $X_{I_i}^N$ που ανήκει στον πίνακα $T_1(u_i)$), τότε ο αλγόριθμος συνεχίζει στο πρώτο τμήμα του. Διαφορετικά, το τρίτο τμήμα ελέγχει εάν ο γραμμικός συνδυασμός που προέκυψε αντιστοιχεί στην επιθυμητή ελάχιστη λύση. Εάν δεν ισχύει αυτή η περίπτωση, τότε ο αλγόριθμος συνεχίζει στο πρώτο τμήμα. Διαφορετικά, έχει υπολογιστεί η επιθυμητή λύση που οδηγεί στον ελαχίστου κόστους μη γραμμικό καταχωρητή ολίσθησης με ανάδραση (NLFSR). Τα παραπάνω τμήματα του κυρίως αλγορίθμου αναλύονται στις επόμενες ενότητες.

9.4.1 Ενημέρωση του $T_{max}(u_i)$

Για κάθε $u_i \in \mathcal{A}$ ας συμβολίσουμε με $set(u_i)$ το σύνολο των στηλών του $T(u_i)$. Επιπλέον, έστω $Set(u_i)$ το σύνολο των στηλών όλων των $T(v)$, $v <_V u_{i+1}$ και $T_{max}(u_i)$ ο πίνακας με στήλες όλα τα διανύσματα του $Set(u_i)$. Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι ισχύει

$$Set(u_i) = \bigcup_{w=1}^i set(u_w) = Set(u_{i-1}) \cup set(u_i),$$

όπου κατά σύμβαση $u_0 = (1, (), (0))$ και $T_{max}(u_0) = (X_0^N)$. Επιπλέον, εάν είναι $set(u_i) \subseteq Set(u_{i-1})$, τότε $Set(u_i) = Set(u_{i-1})$. Από τον ορισμό της ολικής διάταξης και της αρχιτεκτονικής που βασίζεται στα πρωταρχικά σήματα, είναι φανερό ότι κάθε πίνακας $T(u_i)$, $i > 1$ περιέχει το πολύ μία στήλη που δεν περιέχεται σε κάποιο $T(u_w)$, $w < i$. Η στήλη αυτή αντιστοιχεί είτε σε πρωτοεμφανιζόμενο πρωταρχικό σήμα που δεν εμφανίστηκε σε κάποιο $T(u_w)$, $w < i$ είτε σε επόμενη καθυστέρηση πρωταρχικού σήματος που υπάρχει στους πίνακες $T(u_w)$, $w < i$. Επομένως, όλες εκτός ίσως από μία στήλη σίγουρα περιέχονται στον προηγούμενο πίνακα $T_{max}(u_{i-1})$. Πιο συγκεκριμένα, εάν $set(u_i) \not\subseteq Set(u_{i-1})$ τότε υπάρχει στήλη $X_{I_i} \in set(u_i)$ τέτοια ώστε

$$set(u_i) \subseteq Set(u_{i-1}) \cup \{X_{I_i}\} \text{ και } Set(u_i) = Set(u_{i-1}) \cup \{X_{I_i}\}$$

Το I_i δηλώνει το δείκτη της στήλης X_{I_i} , όπως ορίζεται από τις εξισώσεις (9.6) και (9.7) (Ο εκθετικός δείκτης N παραλείπεται για λόγους απλούστευσης). Επομένως, για το $Set(u_i)$ έχουμε

$$Set(u_1) \subseteq Set(u_2) \subseteq \dots \subseteq Set(u_i) \subseteq Set(u_{i+1}) \subseteq \dots$$

Η παραπάνω μερική διάταξη συνόλων επάγεται από την ολική διάταξη $<_V$. Στη συνέχεια ορίζουμε το ακόλουθο διάνυσμα δεικτών:

$$MI_i = \begin{cases} MI_{i-1} & \text{εάν } X_{I_i} = \emptyset \\ (MI_{i-1} \quad (I_i)) & \text{εάν } X_{I_i} \neq \emptyset \end{cases}, \quad i \geq 1 \quad (9.19)$$

με $MI_0 = ((0))$. Το διάνυσμα MI_i περιέχει όλους τους δείκτες πρωταρχικών σημάτων και των καθυστερήσεών τους που εμφανίζονται στον $T_{max}(u_i)$. Η διαδικασία ενημέρωσης των $T_{max}(u_i)$ και MI_i παρουσιάζεται στον Πίνακα 9.2 και εξηγείται καλύτερα στο Παράδειγμα 3. Με $I(u_i)$ συμβολίζουμε το σύνολο των δεικτών που αντιστοιχούν στο u_i .

Πίνακας 9.2: Ενημέρωση του $T_{max}(u_i)$ (TmaxUpdate)

Είσοδοι: u_i	
Έξοδοι: $S_0, X_{I_i}^N$	
Καθολικές μεταβλητές: $i, j, T_{max}(T_{max}(u_0) = (X_0^N)), MI, \mathcal{N}, x(n), N$	
Βήμα 1)	Εντοπισμός στήλης $X_{I_i}^N$: $set(u_i) = (set(u_i) \cap Set(u_{i-1})) \cup \{X_{I_i}^N\}$.
Βήμα 2)	Εάν $X_{I_i}^N = \emptyset$, $T_{max}(u_i) = T_{max}(u_{i-1}); MI_i = MI_{i-1}$. αλλιώς $j = j + 1$; $T_{max}(u_i) = [T_{max}(u_{i-1}) X_{I_i}^N]$; $MI_i = (MI_{i-1} \quad (I_i))$. $S_0 = \{p : MI_i(p) \in I(u_i) \text{ και } S_0(1) > S_0(2) > \dots\}$ Θέτουμε $\mathcal{N}(i) = \text{το πλήθος των στηλών του } T_1(u_i)$.
Βήμα 3)	Επιστροφή.

Παράδειγμα 3.

Ας θεωρήσουμε τα μοντέλα Hammerstein που αναφέρθηκαν στο Παράδειγμα 2 με τον περιορισμό $\max\{L, L_0\} = 4$. Τότε, σύμφωνα με το Παράδειγμα 2 είναι

$$T_{max}(u) = [X_0 \ X_1 \ X_{0,0} \ X_2 \ X_{1,0} \ X_3 \ X_{2,0} \ X_4 \ X_{3,0}]$$

Ο Πίνακας 9.3 αναλύει διεξοδικά τη δομή του πίνακα $T_{max}(u_i)$.

 Πίνακας 9.3: Ανάλυση του πίνακα $T_{max}(u_i)$ του Παραδείγματος 3

i	u_i	$T_{max}(u_i)$	MI_i
1	(1, 1)	$T_{max}(u_1) = [X_0 \ X_1]$	$MI_1 = ((0) \quad (1))$
2	(2, 0, 1)	$T_{max}(u_2) = [T_{max}(u_1) \ X_{0,0}]$	$MI_2 = (MI_1 \quad (0, 0))$
3	(1, 2)	$T_{max}(u_3) = [T_{max}(u_2) \ X_2]$	$MI_3 = (MI_2 \quad (2))$
4	(2, 1, 1)	$T_{max}(u_4) = T_{max}(u_3)$	$MI_4 = MI_3$
5	(2, 0, 2)	$T_{max}(u_5) = [T_{max}(u_4) \ X_{1,0}]$	$MI_5 = (MI_4 \quad (1, 0))$
6	(1, 3)	$T_{max}(u_6) = [T_{max}(u_5) \ X_3]$	$MI_6 = (MI_5 \quad (3))$
7	(2, 2, 1)	$T_{max}(u_7) = T_{max}(u_6)$	$MI_7 = MI_6$
8	(2, 1, 2)	$T_{max}(u_8) = T_{max}(u_7)$	$MI_8 = MI_7$
9	(2, 0, 3)	$T_{max}(u_9) = [T_{max}(u_8) \ X_{2,0}]$	$MI_9 = (MI_8 \quad (2, 0))$
10	(1, 4)	$T_{max}(u_{10}) = [T_{max}(u_9) \ X_4]$	$MI_{10} = (MI_9 \quad (4))$
11	(2, 3, 1)	$T_{max}(u_{11}) = T_{max}(u_{10})$	$MI_{11} = MI_{10}$
12	(2, 2, 2)	$T_{max}(u_{12}) = T_{max}(u_{11})$	$MI_{12} = MI_{11}$
13	(2, 1, 3)	$T_{max}(u_{13}) = T_{max}(u_{12})$	$MI_{13} = MI_{12}$
14	(2, 0, 4)	$T_{max}(u_{14}) = [T_{max}(u_{13}) \ X_{3,0}]$	$MI_{14} = (MI_{13} \quad (3, 0))$

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα το πεπερασμένο σώμα $GF(2^4)$, ένα πρωταρχικό στοιχείο του a και την ακολουθία $a^5, a^4, a^3, a^7, a^6, a^2$. Τότε

$$T_{max}(u_{14}) = \begin{bmatrix} a^5 & a^4 & a^{10} & a^3 & a^8 & a^7 & a^6 & a^6 & a^{14} \\ a^4 & a^3 & a^8 & a^7 & a^6 & a^6 & a^{14} & a^2 & a^{12} \\ a^3 & a^7 & a^6 & a^6 & a^{14} & a^2 & a^{12} & * & a^4 \\ a^7 & a^6 & a^{14} & a^2 & a^{12} & * & a^4 & * & * \\ a^6 & a^2 & a^{12} & * & a^4 & * & * & * & * \\ a^2 & * & a^4 & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

■

Στη γενική περίπτωση, ο πίνακας $T(u_i)$, $i > 1$ μπορεί να περιέχει περισσότερες από μία στήλες που δεν περιέχονται σε κάποιον $T(u_w)$, $w < i$. Η διαδικασία ενημέρωσης του $T_{max}(u_i)$ αντιμετωπίζεται παρόμοια. Συμπερασματικά, κάθε νέο u_i μπορεί να εισάγει πρωταρχικά σήματα ή καθυστερήσεις ήδη υπαρχόντων πρωταρχικών σημάτων που δεν περιέχονται στον πίνακα $T_{max}(u_{i-1})$. Η ιδιότητα αυτή αντανακλάται στην κατασκευή του $T_{max}(u_i)$ με την προσθήκη ή όχι στηλών στον $T_{max}(u_{i-1})$.

9.4.2 Επέκταση του FIA αλγορίθμου

Για κάθε νέα στήλη του $T_{max}(u_i)$ χρειάζεται να προσδιορίσουμε δύο σημαντικά χαρακτηριστικά που επηρεάζουν κρίσιμα τα επόμενα βήματα του αλγορίθμου. Το πρώτο χαρακτηριστικό αντιστοιχεί στο μέγιστο γραμμικό συνδυασμό, ενώ το δεύτερο χαρακτηριστικό σχετίζεται με έναν ανιχνευτή σφαλμάτων. Ο μέγιστος γραμμικός συνδυασμός μιας δεδομένης στήλης εκφράζει το μέγιστο ανώτερο υπομπλόκ της στήλης αυτής ως γραμμικό συνδυασμό των αντίστοιχων προηγούμενων υπομπλόκ, με τον περιορισμό ότι εάν ένα προηγούμενο υπομπλόκ περιέχει μια αδιάφορη είσοδο, ο αντίστοιχος συντελεστής είναι μηδενικός. Ας συμβολίσουμε με l το μήκος του μέγιστου υπομπλόκ. Ο ανιχνευτής σφαλμάτων μιας στήλης ελέγχει εάν ο μέγιστος γραμμικός συνδυασμός που προσδιορίστηκε προηγούμενα μπορεί να εφαρμοστεί στην $l + 1$ -οστή γραμμή. Αυτό απαιτεί όλα τα αδιάφορα στοιχεία της γραμμής αυτής να αντιστοιχούν σε μηδενικούς συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού. Ο ανιχνευτής σφάλματος μιας στήλης συμβολίζεται με f και λαμβάνει τις τιμές -1 (ένα ο συνδυασμός δεν μπορεί να εφαρμοστεί) και 1 .

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μια τροποποιημένη μορφή του FIA που προσδιορίζει τα l_j και f_j κάθε στήλης A_j ενός πίνακα A που περιέχει αδιάφορα στοιχεία. Τα αδιάφορα στοιχεία βρίσκονται διαδοχικά στο κάτω μέρος των στηλών. Σύμφωνα με το θεώρημα ελαχίστου της [35] ο αλγόριθμος FIA βρίσκει το μικρότερο αρχικό σύνολο γραμμικώς εξαρτημένων στηλών ενός $N \times K$ πίνακα $A = [a_{rj}]$ σε ένα σώμα F με τάξη μικρότερη από K . Γενικότερα, ο FIA μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένας αλγόριθμος που ελέγχει τη γραμμική εξάρτηση μιας στήλης του A από τις προηγούμενες στήλες. Υπενθυμίζεται ότι η $j + 1$ -οστή ($0 \leq j < K$) στήλη του A είναι γραμμικώς εξαρτημένη από τις προηγούμενες j στήλες, εάν υπάρχουν c_1, c_2, \dots, c_j στο F , όχι όλα μηδέν, τέτοια ώστε

$$a_{r,j+1} + c_1 a_{r,j} + \dots + c_j a_{r,1} = 0, \quad \text{για } r = 1, 2, \dots, N$$

Χρησιμοποιώντας πολυωνυμική αναπαράσταση ορίζουμε τα πολυώνυμα $C(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_j x^j$ και $a^{(r)}(x) = a_{r,0} + a_{r,1} x + \dots + a_{r,K} x^K$, όπου $c_0 = 1$ και $a_{r,0} = 1$ για $r = 1, 2, \dots, N$. Για $j + 1 \leq n \leq K$, η έκφραση $[C(x)a^{(r)}(x)]_n$ δηλώνει το συντελεστή του όρου x^n στο γινόμενο $C(x)a^{(r)}(x)$, δηλαδή,

$$[C(x)a^{(r)}(x)]_n = c_0 a_{r,n} + c_1 a_{r,n-1} + \dots + c_j a_{r,n-j} = \sum_{w=0}^j c_w a_{r,n-w}$$

Ετσι το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση ενός πολυωνύμου $C(x)$ με βαθμό $\deg C(x) \leq j$ τέτοιο ώστε

$$[C(x)a^{(r)}(x)]_{j+1} = 0, \quad \text{για } r = 1, 2, \dots, N.$$

Το μικρότερο j που συμβολίζεται με j_0 και ικανοποιεί την προηγούμενη εξίσωση προσδιορίζει το μικρότερο αρχικό σύνολο εξαρτημένων στηλών. Το αντίστοιχο πολυώνυμο $C(x)$ είναι μοναδικό. Όλα τα υπόλοιπα $j > j_0$ που ικανοποιούν την προηγούμενη εξίσωση αντιστοιχούν σε γραμμικούς συνδυασμούς της $m + 1$ -οστής στήλης με τις προηγούμενες στήλες. Οι συνδυασμοί αυτοί δεν είναι απαραίτητα μοναδικοί.

Στα επόμενα ο δείκτης j απαριθμεί τις στήλες και ο δείκτης r απαριθμεί τις γραμμές. Επίσης με A_j δηλώνεται η j -οστή στήλη του πίνακα A και με N_j το μήκος της A_j (υπό την έννοια ότι τα τελευταία $N - N_j$ στοιχεία της A_j είναι αδιάφορα στοιχεία). Εστω $C_{r-1,j}(x)$ το πολυώνυμο

$$C_{r-1,j}(x) = \sum_{w=0}^{j-1} c_w^{(r-1,j)} x^w, \quad 1 \leq i \leq N, \quad c_0^{(r-1,j)} = 1 \text{ και } C_{0,1}(x) = 1$$

με την ιδιότητα ότι

$$[C_{r-1,j}(x)a^{(h)}(x)]_j = a_{h,j} + c_1^{(r-1,j)} a_{h,j-1} + \cdots + c_{j-1}^{(r-1,j)} a_{h,1} = 0, \quad \text{για } h \leq r-1$$

Η παραπάνω εξίσωση εκφράζει το πρώτο υπομπλόκ της j -οστής στήλης μήκους $r-1$ ως γραμμικό συνδυασμό των αντιστοίχων υπομπλόκ των προηγούμενων στηλών υπό τον περιορισμό ότι εάν ένα εμπλεκόμενο υπομπλόκ περιέχει ένα αδιάφορο στοιχείο, για παράδειγμα το $a_{r-1,j-w}$, ο αντίστοιχος συντελεστής $c_w^{(r-1,j)} = 0$. Ο περιορισμός ισχύει για όλα τα αδιάφορα στοιχεία όλων των εμπλεκόμενων στηλών συμπεριλαμβανομένης και της A_j .

Η επέκταση του αλγορίθμου προχωρεί σειριακά αναζητώντας για κάθε στήλη A_j το μέγιστο μήκος l_j του άνω υπομπλόκ της στήλης αυτής που γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των αντίστοιχων προηγούμενων υπομπλόκ. Με $C_j(x)$ συμβολίζουμε το αντίστοιχο πολυώνυμο του γραμμικού συνδυασμού. Εξ' ορισμού το $C_j(x)$ δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφράσει το άνω υπομπλόκ μήκους l_j+1 της στήλης A_j ως γραμμικό συνδυασμό των προηγούμενων υπομπλόκ. Με την υπόθεση ότι η A_1 είναι μη μηδενική η πρώτη στήλη του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητη. Ας υποθέσουμε για λόγους απλότητας ότι είναι $a_{11} \neq 0$ και $a_{12} \neq 0$. Τότε η A_1 είναι γραμμικώς ανεξάρτητη, αφού $[C_{0,1}(x)a^{(1)}(x)]_1 \equiv d_{11} = a_{11} \neq 0$. Ετσι έχουμε $l_1 = 0$, $f_1 = 1$ και $C_1(x) = C_{0,1}(x) = 1$. Συνεχίζουμε στη δεύτερη στήλη A_2 θέτοντας $C_{0,2}(x) = C_1(x)$. Είναι προφανές ότι το υπομπλόκ μήκους 1 είναι γραμμικώς εξαρτημένο, αφού $a_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{11}$ ή $1 \cdot a_{12} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{11} = 0$. Ο γραμμικός αυτός συνδυασμός αντιστοιχεί στο πολυώνυμο $C_{1,2}(x) = 1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} x$, το οποίο προκύπτει από τον αλγόριθμο FIA ως εξής: Πρώτα υπολογίζεται το σφάλμα του $C_{0,2}(x)$: $d_{12} = [C_{0,2}(x)a^{(1)}(x)]_1 = a_{12}$. Εφόσον $d_{12} \neq 0$, το πολυώνυμο πρέπει να διορθωθεί. Για το σκοπό αυτό αναζητούμε προηγούμενη στήλη A_v , $v < 2$ με $d_{1v} \neq 0$. Προφανώς $v = 1$. Το πολυώνυμο $C_{1,2}(x)$ ενημερώνεται ως εξής: $C_{1,2}(x) = C_{0,2}(x) - \frac{d_{12}}{d_{11}} C_1(x)x$. Στη συνέχεια εξετάζονται οι επόμενες γραμμές της A_2 . Επομένως το μέγιστο μήκος υπομπλόκ της A_2 που είναι γραμμικώς εξαρτημένο από το αντίστοιχο υπομπλόκ της πρώτης στήλης είναι καλώς ορισμένο. Εάν είναι $l_2 = N_2$, θέτουμε $f_2 = -1$ και ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται. Το πολυώνυμο $C_2(x)$ που προκύπτει αντιστοιχεί σε μια υποψήφια λύση που χρειάζεται να ελεγχθεί ως προς το ελάχιστο από το τρίτο τμήμα του προτεινόμενου αλγορίθμου, το οποίο περιγράφεται στην επόμενη ενότητα. Εάν ο έλεγχος ελαχίστου αποτύχει, συνεχίζουμε στην τρίτη στήλη. Εάν ισχύει $l_2 < N_2$, τότε, είτε το υπομπλόκ της στήλης A_2 μήκους $l_2 + 1$ είναι ανεξάρτητο από το αντίστοιχο μπλοκ της A_1 (δηλαδή $f_2 = 1$) είτε το $l_2 + 1$ -οστό στοιχείο της A_1 είναι ένα αδιάφορο στοιχείο και $c_1^{(l_2,2)} \neq 0$ (δηλαδή $f_2 = -1$). Η πρώτη συνθήκη ανιχνεύεται από το σφάλμα $d_{l_2+1,2} \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή συνεχίζουμε στην τρίτη στήλη. Στη δεύτερη περίπτωση ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται. Το πολυώνυμο $C_{l_2,2}(x) = C_2(x)$ που προκύπτει αντιστοιχεί σε μια υποψήφια λύση που χρειάζεται να ελεγχθεί ως προς το ελάχιστο.

Στη συνέχεια περιγράφουμε το γενικό βήμα του αλγορίθμου για τη στήλη j και τη γραμμή r . Το άνω υπομπλόκ της στήλης A_j μήκους $r-1$ εκφράζεται ως ένας γραμμικός συνδυασμός των αντίστοιχων προηγούμενων υπομπλόκ. Ο γραμμικός συνδυασμός καθορίζεται από τους συντελεστές του πολυωνύμου $C_{r-1,j}(x)$. Πρώτα ελέγχουμε εάν υπάρχει συντελεστής $c_w^{(r-1,j)}$, $0 \leq w \leq j-1$ τέτοιος ώστε το αντίστοιχο $a_{r,j-w}$ στοιχείο να είναι ένα αδιάφορο στοιχείο. Εάν αυτό συμβαίνει, τότε $l_j = r-1$, $f_j = -1$, $C_j(x) = C_{r-1,j}(x)$ και ενεργοποιείται η διαδικασία ελέγχου ως προς το ελάχιστο. Διαφορετικά προχωρούμε στον υπολογισμό του σφάλματος d_{rj} που ορίζεται από τη

σχέση

$$d_{r,j} = [C_{r-1,j}(x)a^{(r)}(x)]_j = a_{r,j} + c_1^{(r-1,j)}a_{r,j-1} + \dots + c_{j-1}^{(r-1,j)}a_{r,1} \quad (9.20)$$

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις. Εάν ισχύει $d_{r,j} = 0$ προχωρούμε στην επόμενη γραμμή θέτοντας $C_{r,j}(x) = C_{r-1,j}(x)$ και $r = r + 1$. Εάν δεν υπάρχει επόμενη γραμμή ($r > N_j$), τότε θέτουμε $f_j = -1, l_j = N_j$ και προχωρούμε στον έλεγχο ελαχίστου. Διαφορετικά, εάν $d_{r,j} \neq 0$ ελέγχουμε εάν υπάρχει $1 \leq v < j$ με $d_{rv} \neq 0$. Εάν αυτό συμβαίνει, θέτουμε

$$C_{r,j}(x) = C_{r-1,j}(x) - \frac{d_{rj}}{d_{rv}}C_v(x)x^{j-v} \quad (9.21)$$

και συνεχίζουμε στην επόμενη γραμμή όπως προηγούμενα. Εάν δεν υπάρχει τέτοιο v , τότε $f_j = +1, l_j = r - 1, C_j(x) = C_{r-1,j}(x)$ και συνεχίζουμε στην επόμενη στήλη.

Όπως υποδηλώνει η πρόταση που ακολουθεί, το πολυώνυμο $C_{r,j}(x)$ που προκύπτει είναι καλά ορισμένο:

Πρόταση 2

Εστω

$$C_{r,j}(x) = c_0^{(r,j)} + c_1^{(r,j)}x + \dots + c_{j-1}^{(r,j)}x^{j-1}$$

το πολυώνυμο που λαμβάνεται από την εξίσωση διόρθωσης (9.21). Τότε, δεν υπάρχει κανένα $c_w^{(r,j)} \neq 0, 0 \leq w \leq j - 1$ που να αντιστοιχεί σε στοιχείο $a_{r,j-w}$ που είναι αδιάφορο.

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $w, 0 \leq w \leq j - 1$ τέτοιο ώστε $c_w^{(r,j)} \neq 0$ με το $a_{r,j-w}$ να είναι ένα αδιάφορο στοιχείο. Από την εξίσωση (9.21) ο όρος x^w περιλαμβάνεται είτε στα μονώνυμα του $x^{j-v}C_v(x)$ είτε στα μονώνυμα του $C_{r-1,j}(x)$ είτε και στα δύο. Ο x^w δεν μπορεί να περιλαμβάνεται στο $C_{r-1,j}(x)$ αφού σε μια τέτοια περίπτωση η δομή του αλγορίθμου θα απαγόρευε τον υπολογισμό του σφάλματος δεικνύοντας μετάβαση στην επόμενη στήλη. Παρόμοια, εάν ο x^w περιλαμβάνεται στο $x^{j-v}C_v(x)$, τότε ο x^{w-j+v} περιλαμβάνεται στο $C_v(x)$. Επομένως, $c_{w-j+v}^{(r,v)} = -c_w^{(r,j)} \frac{d_{rv}}{d_{rj}} \neq 0$ στο $C_v(x)$ και από την υπόθεση αντιστοιχεί στο αδιάφορο στοιχείο $a_{r,j-w}$, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με τη φύση του $C_v(x)$ και τη συνθήκη $d_{rv} \neq 0$. ■

Ο αλγόριθμος EFIA χρησιμοποιεί τέσσερις πίνακες αποθήκευσης στοιχείων: τους $\mathcal{D}, \mathcal{C}, \mathcal{L}$ και \mathcal{F} . Ο πίνακας \mathcal{D} χρησιμοποιείται για την αποθήκευση των σφαλμάτων d_{rj} , ο πίνακας \mathcal{C} για τα πολυώνυμα $C_j(x)$, ο πίνακας \mathcal{L} περιέχει τα χαρακτηριστικά l_j των στηλών A_j και ο \mathcal{F} περιέχει τα χαρακτηριστικά f_j . Ο αλγόριθμος EFIA παρουσιάζεται στον Πίνακα 9.4.

Πίνακας 9.4: Επέκταση του Fundamental Iterative Algorithm (EFIA)

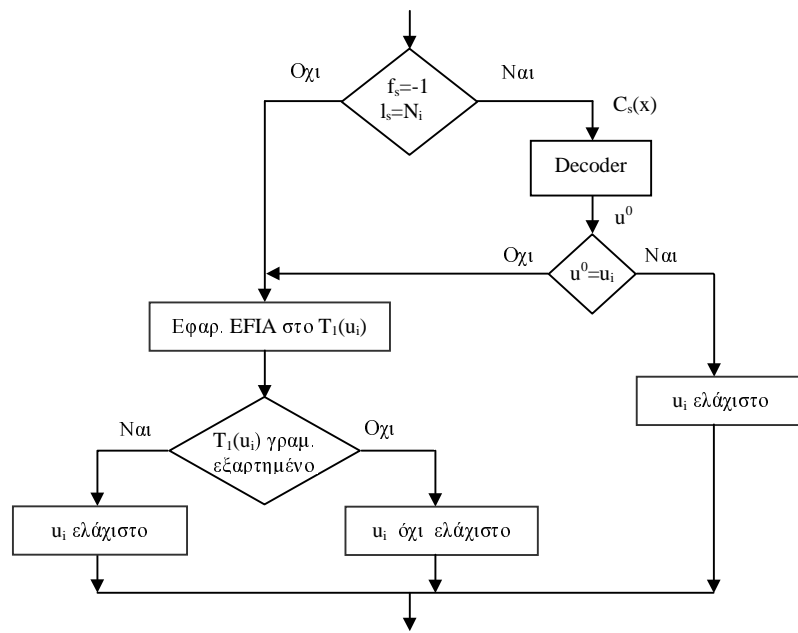
	Είσοδοι: $A = [a_{rj}]$, $[N_A, J_{max}] = \text{size}(A)$.
	% πλήθος γραμμών και στηλών του A
	Καθολικές μεταβλητές: $j, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{L}$
Βήμα 0)	Αρχικοποίηση: $\mathcal{D} = \mathcal{C} = \mathcal{F} = \mathcal{L} = []$, $j = 1$, $C_0(x) = 1$.
Βήμα 1)	$r = 1$; $C_{0,j}(x) = C_{j-1}(x)$
Βήμα 2)	Εάν $r \leq N_A$,
	Εάν υπάρχει w , $0 \leq w \leq j - 1$ τέτοιο ώστε
	$(c_w^{(r-1,j)} \neq 0 \text{ και } a_{r,j-w} \text{ είναι ένα αδιάφορο στοιχείο})$,
	προχωρούμε στο βήμα 3).
	Υπολογισμός $d_{rj} = [C_{r-1,j}(x)a^{(r)}(x)]_j$.
	Εάν $d_{rj} = 0$,
	$C_{r,j}(x) = C_{r-1,j}(x)$; $r = r + 1$; προχωρούμε στο βήμα 2).
	διαφορετικά εάν υπάρχει $d_{rv} \in \mathcal{D}$ για κάποιο $1 \leq v < j$,
	$C_{r,j}(x) = C_{r-1,j}(x) - \frac{d_{rj}}{d_{rv}} C_v(x)x^{j-v}$;
	$r = r + 1$; προχωρούμε στο βήμα 2)
	διαφορετικά,
	d_{rj} αποθηκεύεται στον πίνακα \mathcal{D} ;
	$C_j(x) = C_{r-1,j}(x)$ $C_j(x)$ αποθηκεύεται στον \mathcal{C} ;
	$\mathcal{L}(j) = r - 1$; $\mathcal{F}(j) = 1$; προχωρούμε στο βήμα 4).
Βήμα 3)	$C_j(x) = C_{r-1,j}(x)$; $C_j(x)$ αποθηκεύεται στον \mathcal{C} ;
	$\mathcal{L}(j) = r - 1$; $\mathcal{F}(j) = -1$;
Βήμα 4)	Εάν $j < J_{max}$, %Προχωρούμε στην επόμενη στήλη
	$j = j + 1$; προχωρούμε στο βήμα 1).
	διαφορετικά επιστροφή.

9.4.3 Ελεγχος ως προς το ελάχιστο

Το τμήμα αυτό του αλγορίθμου ελέγχει εάν ο μέγιστος γραμμικός συνδυασμός της s -οστής στήλης του $T_{max}(u_i)$ που περιγράφεται από το $C_s(x)$ αντιστοιχεί στο u_i . Εάν αυτό ισχύει, τότε το u_i είναι η ελάχιστη λύση, αφού, καθώς ο αλγόριθμος προχωρεί σειριακά σύμφωνα με την ολική διάταξη, στο βήμα i όλες οι λύσεις $u <_V u_i$ έχουν απορριφθεί. Η διαδικασία που ακολουθείται παρουσιάζεται στο Σχήμα 9.4.

Εστω το N_i συμβολίζει το πλήθος των γραμμών του $T_1(u_i)$ (βλέπε εξίσωση (9.10)). Εάν ο ανιχνευτής σφάλματος δε δώσει $f_s = -1$ και επίσης ισχύει $l_s \neq N_i$, η εξαγόμενη από τον $T_{max}(u_i)$ πληροφορία δεν είναι αρκετή για να συμπεράνει κανείς τη γραμμική εξάρτηση του $T_1(u_i)$. Επομένως ο EFIA αλγόριθμος εφαρμόζεται κατευθείαν στον $T_1(u_i)$. Εάν ο $T_1(u_i)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένος, τότε το u_i αντιστοιχεί στην ελάχιστη λύση. Διαφορετικά, όπως φαίνεται και από το Σχήμα 9.3, συνεχίζουμε με το επόμενο διάνυσμα u_{i+1} .

Εάν ισχύει $f_s = -1$ και $l_s = N_i$, τότε υπολογίζεται το διάνυσμα δομής u^0 που αντιστοιχεί στο πολυώνυμο $C_s(x)$ με τη χρήση του αποκωδικοποιητή που περιγράφεται στον Πίνακα 9.5. Ο αποκωδικοποιητής καθορίζει εάν ο γραμμικός συνδυασμός $C_s(x)$ αντιστοιχεί σε μια αναδρομικά υπολογιζόμενη αρχιτεκτονική ή όχι. Εκτός από το $C_s(x)$, δέχεται ως είσοδο το αντίστοιχο σύνολο δεικτών MI_i του $T_{max}(u_i)$ και δίνει στην έξοδο το διάνυσμα δομής u^0 της αναδρομικά υπολογιζόμενης αρχιτεκτονικής που ανιχνεύθηκε, εκτός και αν δεν υπάρχει κανένα τέτοιο u_i . Στην τελευταία περίπτωση η έξοδος του αποκωδικοποιητή είναι το κενό διάνυσμα. Εάν ισχύει $u^0 = u_i$, τότε το u_i είναι η ελάχιστη λύση. Διαφορετικά, αφού το $C_s(x)$ δεν είναι εν γένει μοναδικό, ο



Σχήμα 9.4: Η δομή του ελέγχου ελαχίστου

αλγόριθμος EFIA εφαρμόζεται στο $T_1(u_i)$ για να ελεγχθεί εάν το u_i είναι λύση και επομένως η ελάχιστη. Η τελευταία περίπτωση επίσης ακολουθείται εάν η έξοδος του αποκωδικοποιητή είναι $u^0 = \emptyset$. Η διαδικασία ελέγχου του ελαχίστου παρουσιάζεται στον Πίνακα 9.6.

Πίνακας 9.5: Σχήμα αποκωδικοποίησης του διανύσματος δομής (Decoder)

	Είσοδοι: $C_s(x) = c_0^{(s)} + c_1^{(s)}x + \dots + c_{s-1}^{(s)}x^{s-1}$, MI_i
	Έξοδοι: u .
Βήμα 1)	Θέτουμε $W = \{w \in MI_i : MI_i(q) = w \text{ και } c_{s-q}^{(s)} \neq 0, 1 \leq q \leq s\}$.
Βήμα 2)	Χρησιμοποιούμε τα στοιχεία του W για να υπολογίσουμε: θέτουμε $K^{max} = \max\{P : w = (P) \in W\}$. θέτουμε $K^{min} = \min\{P : w = (P) \in W\}$. θέτουμε $K_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}}^{max} = \max\{P : w = (P, i_1, i_2, \dots, i_{m-1}) \in W\}$. θέτουμε $K_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}}^{min} = \min\{P : w = (P, i_1, i_2, \dots, i_{m-1}) \in W\}$.
Βήμα 3)	Εάν $K^{max} > K_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}}^{max}$ για όλα τα $K_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}}^{max}$, α) εάν δεν υπάρχει κανένα $(P, i_1, i_2, \dots, i_{m-1})$ στο W , θέτουμε $k = 1$. % Προσδιορισμός του k διαφορετικά θέτουμε $k = \max\{m : w = (P, i_1, i_2, \dots, i_{m-1}) \in W\}$. β) για $m = 2 : k$ % προσδιορισμός $r(k)$ (βλέπε εξ. (9.4)) εάν δεν υπάρχει κανένα $(P, i_1, i_2, \dots, i_{m-1}) \in W$, $p_{m2} = p_{m3} = \dots = p_{mm} = 0$, διαφορετικά $p_{mv} = \max\{\sum_{y=1}^{v-1} i_y\}, 2 \leq v \leq m, (P, i_1, \dots, i_{m-1}) \in W$. γ) $L = K^{max} - K^{min}$. % προσδιορισμός $S(k, r(k))$ (βλέπε εξ. (9.5)) για όλα τα $2 \leq m \leq k$ και i_1, i_2, \dots, i_{m-1} στα $[0, p_{m2}], [0, p_{m3} - i_1], \dots$ εάν δεν υπάρχει κανένα $(P, i_1, i_2, \dots, i_{m-1}) \in W$, θέτουμε $L_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}} = 0$, διαφορετικά $L_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}} = K^{max} - K_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}}^{min}$. Θέτουμε $I = (i_1, \dots, i_{m-1})$ και $M_I = \min\{P + 1 - i_1 - \dots - i_{m-1}\}$, για όλα τα $w \in W$. Εάν $\min\{M_I\} > 1$, για όλα τα $J : M_J = \min\{M_I\}$ βρίσκουμε J_0 τέτοιο ώστε το u με $L_{J_0} = L_{J_0} + M_J - 1$ να είναι ελάχιστο. Θέτουμε $L_{J_0} = L_{J_0} + M_J - 1$. δ) $u = (k, (p_{22} \mid p_{32}, p_{33} \mid \dots), (L \mid L_0, \dots, L_{p_{22}} \mid \dots))$ διαφορετικά $u = []$.

Πίνακας 9.6: Ελεγχος ελαχίστου (Minimality check)

Είσοδοι : $C_s(x), s$	
Έξοδοι : u^0, C^0	
Καθολικές μεταβλητές: $i, MI, \mathcal{F}, \mathcal{L}$	
Βήμα 1)	Εάν όχι ($\mathcal{F}(s) = -1$ και $\mathcal{L}(s) = \mathcal{N}(i)$), προχωρούμε στο βήμα 2)
	διαφορετικά $u^0 = \text{Decoder}(C_s(x), MI_i(1 : s))$.
	εάν $u^0 = u_i, C^0 = C_s(x)$; Επιστροφή.
Βήμα 2)	Εφαρμόζουμε τον EFIA στον $T_1(u_i)$ και υπολογίζουμε πολυώνυμο $C(x)$. Εάν στήλες του $T_1(u_i)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες, $u^0 = u_i; C^0 = C(x)$. διαφορετικά $u^0 = []; C^0 = []$. Επιστροφή.

9.4.4 Η διατύπωση του αλγορίθμου

Ο πλήρης αλγόριθμος παρουσιάζεται στον Πίνακα 9.7. Το u_{min} δηλώνει το διάνυσμα των παραμέτρων δομής που αντιστοιχεί στην ελάχιστη λύση και C_{min} το αντίστοιχο ελάχιστο πολυώνυμο, ενώ το \mathcal{N} δηλώνει το διάνυσμα που περιέχει τα μήκη N_i . Η παράμετρος I_{max} τίθεται ίση με την πληθικότητα του \mathcal{A} . Εναλλακτικά, το I_{max} μπορεί να επιλεγεί ίσο με το μήκος του ελαχίστου LFSR που παράγει τη δοσμένη ακολουθία. Τέλος, τα \mathcal{L}, \mathcal{F} και \mathcal{C} είναι καθολικές μεταβλητές, οι τιμές των οποίων προδιορίζονται από τον EFIA.

Πίνακας 9.7: Ο μπλοκ αλγόριθμος σύνθεσης NLFSR

Είσοδοι : $\mathcal{A}, I_{max}, x(n), N$	
Έξοδοι : u_{min}, C_{min}	
Καθολικές μεταβλητές: $x(n), i, j, N, \mathcal{L}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathcal{N}, T_{max}, MI$	
Βήμα 0)	Αρχικοποίηση: $C_{min} = \emptyset, u_{min} = \emptyset, i = 0, j = 1,$ $T_{max}(u_i) = [X_0^N], MI = ((0)).$
Βήμα 1)	Εφαρμόζουμε τον EFIA στον $T_{max}(u_i)$. Εάν $\mathcal{L}(j) = N$, τότε $C_{min} = 1; u_{min} = (1, (), (0));$ Τέλος.
Βήμα 2)	$i = i + 1$; Εάν $i > I_{max}$, Τέλος. $[S_0, X_{I_i}^N] = \text{TmaxUpdate}(u_i);$
Βήμα 3)	Εάν $X_{I_i}^N \neq \emptyset$, συνεχίζουμε την εφαρμογή του EFIA στη νέα στήλη $X_{I_i}^N$ (βήματα 1-3 του EFIA, $N_A = \mathcal{N}(i)$).
Βήμα 4)	Για όλα τα $s \in S_0$ Εάν όχι ($\mathcal{F}(s) = 1$ και $\mathcal{L}(s) < \mathcal{N}(i)$), $[u^0, C^0] = \text{Minimality check}(C_s(x), s);$ Εάν $u^0 = u_i, u_{min} = u_i; C_{min} = C^0$; Τέλος. Προχωρούμε στο βήμα 2).

Συμπερασματικά, το αποτέλεσμα του αλγορίθμου είναι το ζεύγος $\{u_{min}, C_{min}\}$. Σε κάθε βήμα i ο αλγόριθμος ελέγχει διαμέσου του $T_{max}(u_i)$ εάν το διάνυσμα u_i αποτελεί λύση. Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις:

- Ανυπαρξία γραμμικού συνδυασμού που περιλαμβάνει το μέγιστο υπομπλόκ (μήκους ίσο με το μήκος των στηλών του $T_1(u_i)$) της τελευταίας στήλης του $T_{max}(u_i)$ οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το u_i δεν αποτελεί λύση.
- Η γραμμική εξάρτηση του μέγιστου υπομπλόκ (μήκους ίσου με το μήκος των στηλών του $T_1(u_i)$) της τελευταίας στήλης του $T_{max}(u_i)$ από τα υπόλοιπα αντίστοιχα υπομπλόκ του $T_{max}(u_i)$ οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει λύση που είναι είτε η u_i είτε $u >_V u_i$ είτε δεν είναι αποδεκτή λύση.
- Εάν δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τη γραμμική εξάρτηση του μέγιστου υπομπλόκ της τελευταίας στήλης του $T_{max}(u_i)$ τότε απαιτείται ο ρητός έλεγχος του $T_1(u_i)$.

Πρόταση 3

Έστω ότι $\{u_{min} = (k, r(k), S(k, r(k))), C_{min}\}$ είναι το αποτέλεσμα του αλγορίθμου που περιγράφει τον ελάχιστο NLFSR καταχωρητή, ο οποίος παράγει τη δεδομένη ακολουθία $x(n), n = 1, \dots, N$. Έστω Q το άθροισμα των συνιστωσών του $Q(u_{min})$ και M η παράμετρος που δίνεται από την εξίσωση (9.2). Εάν $N \geq M + Q - 1$ και όλες οι $Q - 1$ στήλες του $T_1(u_{min})$, εκτός από την X_M^{N-M} , είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, τότε το C_{min} είναι μοναδικό.

Απόδειξη:

Το αποτέλεσμα προκύπτει είτε απευθείας από τον $T_{max}(u_{min})$ είτε μετά την εφαρμογή του EFIA στον πίνακα $T_1(u_{min})$. Σε κάθε περίπτωση, αφού το u_{min} είναι το αποτέλεσμα, εμπλέκονται Q το πλήθος στηλών και προκύπτει γραμμική εξάρτηση στον $(N - M) \times Q$ πίνακα $T_1(u_{min})$. Έστω T_2 ο πίνακας που περιέχει όλες τις στήλες του $T_1(u_{min})$ εκτός από τη στήλη Q_M^{N-M} . Ο υπολογισμός του C_{min} με τον EFIA ισοδυναμεί με την επίλυση του $(N - M) \times (Q - 1)$ συστήματος με $Q - 1$ άγνωστες παραμέτρους, το οποίο περιγράφεται από τον πίνακα T_2 και X_M^{N-M} είναι το διάνυσμα που περιέχει τις σταθερές του συστήματος. Προφανώς, εάν $N \geq M + Q - 1$ και όλες οι $Q - 1$ στήλες του T_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, το C_{min} είναι μοναδικό. ■

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση της σύνθεσης των LFSR καταχωρητών ελαχίστου μήκους, εάν $2L \leq N$, τότε το πολυώνυμο που προκύπτει περιγράφει το μοναδικό ελαχίστου μήκους L LFSR καταχωρητή που παράγει τη δεδομένη ακολουθία. Στην περίπτωση της σύνθεσης NLFSR καταχωρητών ελαχίστου κόστους, η γραμμική ανεξαρτησία του T_2 πρέπει να εξεταστεί περαιτέρω. Στη γραμμική περίπτωση το τελευταίο δεν είναι απαραίτητο, καθώς κάθε γραμμική εξάρτηση αποκλείεται, αφού θα σήμαινε έναν LFSR καταχωρητή με μικρότερο μήκος.

Τέλος, πρέπει να σημειώσουμε ότι για περιοδικές ακολουθίες ο αλγόριθμος απλοποιείται, αφού δεν υπάρχουν αδιάφορα στοιχεία στον $T_{max}(u_i)$. Έτσι, πάντα μπορούμε να αποφανθούμε εάν η τελευταία στήλη του $T_{max}(u_i)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητη ή όχι από τις υπόλοιπες στήλες του $T_{max}(u_i)$.

Ανάλυση πολυπλοκότητας

Η εξαντλητική αναζήτηση περιλαμβάνει την εφαρμογή του ελέγχου γραμμικής εξάρτησης σε ένα σύνολο πινάκων (πίνακα προς πίνακα) μέχρις ότου προσδιοριστεί ο NLFSR ελαχίστου κόστους. Αντίθετα, ο προτεινόμενος αλγόριθμος περιλαμβάνει κύρια την εφαρμογή του ελέγχου γραμμικής εξάρτησης σε ένα μόνο πίνακα (στήλη προς στήλη) μέχρις ότου προσδιοριστεί ο NLFSR ελαχίστου κόστους. Έστω u_b είναι το διάνυσμα δομής του ελαχίστου συστήματος που παράγει τους όρους της δεδομένης ακολουθίας. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος εφαρμόζει τον έλεγχο γραμμικής εξάρτησης (EFIA) σε έναν $N \times q$ πίνακα, $q \leq b + 1$. Εάν εφαρμοστεί η εξαντλητική αναζήτηση, η λύση λαμβάνεται από την εφαρμογή του EFIA σε b πίνακες μεγέθους $N \times q_i, i = 1, \dots, b$. Η μείωση της πολυπλοκότητας είναι προφανής, αφού $\sum_{i=1}^b q_i > q$.

Παράδειγμα 4.

Ας θεωρήσουμε το πεπερασμένο σώμα $GF(2^2)$, ένα πρωταρχικό στοιχείο a και την ακολουθία $a^2, a, a^2, 1, 1, a, 1, a^2, a^2, 0, a^2, 0, 0$. Ας υποθέσουμε ότι οι επιτρεπτές υλοποιήσεις περιορίζονται στα Hammerstein μοντέλα. Ο πρώτος μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός παρέχεται από τον αλγόριθμο για $i = 14$ και περιγράφεται από τη σχέση:

$$[x(n)]^2 = [x(n-1)]^2 + a[x(n-3)]^2 + x(n) + x(n-1) + a^2x(n-3), \quad n > 3$$

Ο παραπάνω συνδυασμός δεν παρέχει μια αναδρομικά υπολογιζόμενη έκφραση. Ο επόμενος συνδυασμός που λαμβάνεται για $i = 15$ είναι ο

$$x(n) = ax(n-3) + a^2x(n-4) + a^2x(n-5), \quad n > 5$$

Αντιστοιχεί στο $u^0 = u_{15}$ που είναι η επιθυμητή λύση. Η εφαρμογή του αλγορίθμου B-M δίνει την ίδια έκφραση. ■

Παράδειγμα 5.

Ας θεωρήσουμε το πεπερασμένο σώμα $GF(2^4)$ που παράγεται από το $p(x) = 1 + x + x^4$, ένα πρωταρχικό στοιχείο a και την ακολουθία $a^7, a^5, 0, a^{10}, a^7, a^4, a^3$. (Η ακολουθία παράγεται από την εξίσωση

$$x(n) = a^{10}x(n-1) + ax(n-2) + a^7x(n-3) + a^9x(n-4), \quad 5 \leq n \leq 7 \quad (9.22)$$

με αρχικές συνθήκες $x(1) = a^7, x(2) = a^5, x(3) = 0, x(4) = a^{10}$). Η εφαρμογή του αλγορίθμου για τα διανύσματα δομής $u \in \mathcal{A}$ με $k \leq 4, L \leq 10$ και $L_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}} \leq 10, 2 \leq m \leq 4$, οδηγεί στον ακόλουθο μη γραμμικό καταχωρητή ελαχίστου κόστους:

$$x(n) = a^2[x(n-1)]^2 + a^5x(n-2), \quad n > 2$$

ο οποίος πράγματι παράγει τη δοθείσα ακολουθία. Ο γραμμικός καταχωρητής (9.22) λαμβάνεται από τον αλγόριθμο εάν αυτός αφεθεί να συνεχίσει περαιτέρω και το κόστος υλοποίησής του είναι μεγαλύτερο από το κόστος του μη γραμμικού καταχωρητή που υπολογίστηκε προηγούμενα. ■

9.5 Σειριακός αλγόριθμος προσδιορισμού του καταχωρητή ελαχίστου κόστους

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ο αλγόριθμος ενημέρωσης του ελάχιστου καταχωρητή που υπολογίζει τη δεδομένη ακολουθία κατά σειριακό τρόπο. Ας συμβολίσουμε με $\{C^N(x), u^N\}$ την ελάχιστη αρχιτεκτονική που παράγει τους N πρώτους όρους της δεδομένης ακολουθίας (στη συνέχεια, ο δείκτης N δείχνει ότι οι N πρώτοι όροι της ακολουθίας λαμβάνουν μέρος στους υπολογισμούς). Αναζητούμε την αρχιτεκτονική $\{C^{N+1}(x), u^{N+1}\}$ που προσδιορίζει το ελάχιστο σύστημα το οποίο παράγει τους πρώτους $N+1$ όρους της $x(n)$. Εάν η $\{C^N(x), u^N\}$ παράγει τους $N+1$ όρους της ακολουθίας, απλά θέτουμε $C^{N+1}(x) = C^N(x)$ και $u^{N+1} = u^N$. Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι το πολυώνυμο $C^N(x)$ δεν παράγει τον επόμενο όρο $x(N+1)$. Ο προσδιορισμός των $C^{N+1}(x)$ και u^{N+1} απαιτεί την ενημέρωση των χαρακτηριστικών l_j, f_j και $C_j(x)$ για όλες τις στήλες του $T_{max}^{N+1}(u^N)$. Είναι προφανές ότι $u^{N+1} >_V u^N$. Πρώτα ενημερώνουμε τον $T_{max}^{N+1}(u^N)$ με την εισαγωγή του όρου $x(N+1)$ σε όλες τις στήλες του $T_{max}^N(u^N)$ με τον κατάλληλο τρόπο και την επαύξηση του $T_{max}^N(u^N)$ με τη γραμμή που αντιστοιχεί στον όρο $x(N+1)$. Τα χαρακτηριστικά πολυώνυμο $C_j(x)$ μπορεί να παραμείνουν αμετάβλητα για ορισμένες στήλες. Εστω το m ορίζει την πρώτη στήλη του $T_{max}^{N+1}(u^N)$, της οποίας το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μεταβάλλεται. Τότε θα χρειαστεί να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος EFIA από τη m -οστή στήλη μέχρι την τελευταία στήλη του $T_{max}^{N+1}(u^N)$ για να γίνει η ενημέρωση των χαρακτηριστικών πολυωνύμων των επομένων στηλών.

Στη συνέχεια περιγράφουμε διεξοδικά τη διαδικασία για την ενημέρωση των παραμέτρων l_j , f_j και $C_j(x)$. Όσο ισχύει $f_j^N = 1$ θέτουμε $f_j^{N+1} = f_j^N = 1$. Διαφορετικά για την πρώτη τιμή του $j = m_1$ για την οποία $f_{m_1}^N = -1$ εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο EFIA στη m_1 -οστή στήλη του $T_{max}^{N+1}(u^N)$. Αν το πολυώνυμο που προκύπτει $C_{m_1}^{N+1}(x)$ δεν συμπίπτει με το $C_{m_1}^N(x)$, συνεχίζουμε την εφαρμογή του EFIA στις απομένουσες στήλες του $T_{max}^{N+1}(u^N)$ ξεκινώντας από την $m_1 + 1$ -οστή στήλη. Ως αποτέλεσμα προκύπτουν οι τιμές των f_j^{N+1} , l_j^{N+1} και $C_j^{N+1}(x)$. Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι $C_{m_1}^{N+1}(x) = C_{m_1}^N(x)$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις. Εάν ισχύει $f_{m_1}^{N+1} = -1$, θέτουμε $f_j^{N+1} = f_j^N = 1, j > m_1$ όσο οι επόμενες στήλες χαρακτηρίζονται από $f_j^N = 1$. Για τα επόμενα $m_2 > m_1$ για τα οποία ισχύει $f_{m_2}^N = -1$ συνεχίζουμε επαναλαμβάνοντας την προηγούμενη διαδικασία. Η δεύτερη περίπτωση συμβαίνει όταν $f_{m_1}^{N+1} = 1$. Στην περίπτωση αυτή προσδιορίζουμε την πρώτη στήλη $k_1 > m_1$ η οποία είναι τέτοια ώστε να ισχύει $f_{k_1}^N = 1$ και $l_{k_1}^N = l_{m_1}^{N+1}$. Εάν δεν υπάρχει κανένα m_2 , $m_1 < m_2 < k_1$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f_{m_2}^N = -1$, οι ενδιάμεσες ποσότητες παραμένουν αμετάβλητες για τις στήλες $m_1 + 1$ μέχρι $k_1 - 1$. Στην περίπτωση αυτή, ο EFIA εφαρμόζεται διαδοχικά από την k_1 -οστή μέχρι την τελευταία στήλη του $T_{max}^{N+1}(u^N)$. Εάν υπάρχει m_2 τέτοιο ώστε να ισχύει $f_{m_2}^N = -1$, η διαδικασία που περιγράφηκε προηγούμενα για το m_1 επαναλαμβάνεται μέχρι την k_1 -οστή στήλη. Από εκείνο το σημείο και μετά εφαρμόζεται ο αλγόριθμος EFIA. Η παραπάνω διαδικασία καλείται Ενημέρωση του $T_{max}^N(u^N)$ και παρουσιάζεται στον Πίνακα 9.8. Στη συνέχεια χρησιμοποιείται ο μπλοκ αλγόριθμος σύνθεσης των NLFSR καταχωρητών για τον προσδιορισμό του επόμενου διανύσματος δομής $u_i >_V u^N$ που αποτελεί τον ελάχιστο καταχωρητή ο οποίος παράγει τους πρώτους $N + 1$ όρους της ακολουθίας. Ο σειριακός αλγόριθμος σύνθεσης των NLFSR καταχωρητών παρουσιάζεται στον Πίνακα 9.9. Οι μεταβλητές έχουν την ίδια έννοια που έχουν και στον μπλοκ αλγόριθμο. Το N_{max} είναι το πλήθος δειγμάτων της ακολουθίας εισόδου.

Πίνακας 9.8: Ενημέρωση του $T_{max}(u_N)$

	Είσοδοι: $T_{max}^N(u^N), \mathcal{C}^N, \mathcal{N}, \mathcal{F}^N, \mathcal{L}^N, x(N+1), MI_i$. Έξοδοι: $T_{max}^{N+1}(u^N), \mathcal{C}^{N+1}, \mathcal{N}, \mathcal{F}^{N+1}, \mathcal{L}^{N+1}$ Καθολικές Μεταβλητές: $j, \mathcal{C}, \mathcal{N}, \mathcal{F}, \mathcal{L}, T_{max}$
Βήμα 0)	Ενημέρωση του $T_{max}^N(u^N)$ στον $T_{max}^{N+1}(u^N)$ χρησιμοποιώντας το δείγμα $x(N+1)$ και τους δείκτες του MI_i . $\mathcal{N} = \mathcal{N} + 1$; $\mathcal{DC} = \{m : \mathcal{F}(m) = -1\}$. $L_{\mathcal{DC}}$: μήκος του \mathcal{DC} ; $J_{max} = j$; $j_0 = j + 1$; $s = 0$.
Βήμα 1)	$s = s + 1$; Εάν $(s > L_{\mathcal{DC}}$ ή $\mathcal{DC}(s) \geq j_0$) προχωρούμε στο βήμα 2). Εφαρμογή του EFIA στη $j = \mathcal{DC}(s)$ -οστή στήλη του $T_{max}^{N+1}(u^N)$ (βήματα 1-3 του EFIA). Εάν $C_j^{N+1}(x) = C_j^N(x)$, εάν $\mathcal{F}^{N+1}(j) = -1$, προχωρούμε στο βήμα 1) διαφορετικά εάν $\mathcal{F}^{N+1}(j) = 1$, εύρεση του ελάχιστου $k_1 > j$ τέτοιου ώστε $\mathcal{F}^N(k_1) = 1$ και $\mathcal{L}^N(k_1) = \mathcal{L}^{N+1}(j)$ εάν $j_0 > k_1$, θέτουμε $j_0 = k_1$; προχωρούμε στο βήμα 1) διαφορετικά $j_0 = j + 1$.
Βήμα 2)	Εάν $j_0 \leq J_{max}$, εφαρμογή του EFIA από τη $j = j_0$ μέχρι τη J_{max} στήλη του $T_{max}(u_i)$ (βήματα 1-4 του EFIA). Επιστροφή.

Πίνακας 9.9: Ο σειριακός αλγόριθμος σύνθεσης NLFSR

	Είσοδοι: $\mathcal{A}, I_{max}, x(n), N_{max}$ Έξοδοι: u_{min}, C_{min} Καθολικές μεταβλητές: $x(n), i, j, \mathcal{L}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathcal{N}, T_{max}, MI$
Βήμα 0)	Αρχικοποίηση: $u_{min} = \emptyset; C_{min} = \emptyset; N = 0; i = 0; j = 1; X_0^N = [];$ $T_{max}(u_i) = []; MI = ((0)).$
Βήμα 1)	$N = N + 1$; Εάν $N > N_{max}$, τέλος. $X_0^N = [X_0^{N-1} \ x(N)]^T$. Εάν $x(N) = 0$, τότε $C_{min} = 1; u_{min} = (1, (), (0))$; προχωρούμε στο βήμα 1). $\mathcal{N} = [N]; T_{max}(u_i) = [X_0^N]; MI = ((0))$; προχωρούμε στο βήμα 3).
Βήμα 2)	$N = N + 1$; Εάν $N > N_{max}$, τέλος. Εφαρμογή της Ενημέρωσης του $T_{max}^N(u^N)$. Εάν η $\{u_{min}, C_{min}\}$ παράγει το $x(N)$, προχωρούμε στο βήμα 2)
Βήμα 3)	$i = i + 1$. Εάν $i > I_{max}$, τέλος. $[S_0, X_{I_i}^N] = \text{TmaxUpdate}(u_i)$.
Βήμα 4)	Εάν $X_{I_i}^N \neq \emptyset$, συνεχίζουμε την εφαρμογή του EFIA στη νέα στήλη $X_{I_i}^N$ (βήματα 1-3 του EFIA, $N_A = \mathcal{N}(i)$)
Βήμα 5)	Για όλα τα $s \in S_0$ Εάν όχι ($\mathcal{F}(s) = 1$ και $\mathcal{L}(s) < \mathcal{N}(i)$), $[u^0, C^0] = \text{Minimality check}(C_s(x), s)$; Εάν $u^0 = u_i, u_{min} = u_i; C_{min} = C^0$; Τέλος. Προχωρούμε στο βήμα 2).

Παράδειγμα 6.

Ας θεωρήσουμε την ακολουθία του παραδείγματος 5 και ας υποθέσουμε ότι οι επόμενοι δύο νέοι όροι της ακολουθίας είναι οι $x(8) = a^{12}$ και $x(9) = a^{10}$. Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι ο όρος a^{12} παράγεται από τον τρέχοντα ελάχιστο καταχωρητή. Αντίθετα, ο όρος a^{10} δεν μπορεί να παραχθεί από τον τρέχοντα ελάχιστο καταχωρητή. Επομένως, ο ελάχιστος NLFSR πρέπει να ενημερωθεί κατάλληλα. Εφαρμογή του σειριακού αλγορίθμου δίνει

$$x(n) = a^6 x(n-2) + x(n-3) + a^9 x(n-4) + a^{11} x(n-5), \quad n > 5$$

■

9.5.1 Συμπεράσματα

Μελετήσαμε τη σύνθεση των μη γραμμικών καταχωρητών ολίσθησης με ανάδραση ελαχίστου κόστους που παράγουν μια δεδομένη πεπερασμένου μήκους ακολουθία με στοιχεία σε ένα οποιοδήποτε σώμα και παρουσιάστηκαν τόσο ο μπλοκ τύπου αλγόριθμος όσο και ο σειριακός αλγόριθμος. Οι μέθοδοι αυτοί μπορούν να ιδωθούν ως επεκτάσεις του αλγορίθμου των Berlekamp-Massey και του FIA αλγορίθμου. Οι ενημερώσεις βασίζονται σε ένα μηχανισμό ανίχνευσης σφαλμάτων. Η αναζήτηση διεξάγεται σε ένα πολυδιάστατο σύνολο που διατάσσεται από το συνδυασμό μιας ολικού βαθμού διάταξης με μια συνάρτηση κόστους που αντιπροσωπεύει το κόστος υλοποίησης. Κατάλληλες διαδικασίες διευθυνσιοδότησης και μια τεχνική επέκτασης του FIA συνοδεύουν τον κύριο κορμό των αλγορίθμων.

Αν και οι προτεινόμενοι αλγόριθμοι είναι σχεδιασμένοι να παράγουν την ελάχιστη αρχιτεκτονική, μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό εναλλακτικών αρχιτεκτονικών που

παράγουν τη δεδομένη ακολουθία. Επιπλέον οι αλγόριθμοι εφαρμόζονται σε ακολουθίες οποιουδήποτε σώματος. Η δομή των προτεινόμενων αλγορίθμων παραμένει αναλλοίωτη εκτός από την προσαρμογή των πράξεων στο συγκεκριμένο σώμα.

Οι προτεινόμενοι αλγόριθμοι μπορούν να ιδωθούν ως επέκταση του κλασικού Berlekamp - Massey αλγορίθμου (BMA). Η ολική διάταξη ως προς το μήκος των LFSRs αντικαθίσταται από μια ολική διάταξη που βασίζεται στο κόστος υλοποίησης των NLFSRs. Στη γραμμική περίπτωση το μήκος των LFSRs είναι κατευθείαν ισοδύναμο με το κόστος υλοποίησης καθώς δηλώνει το πλήθος των μονάδων καθυστέρησης και των γραμμικών συνδυασμών. Επιπρόσθετα, ο LFSR με το μικρότερο μήκος ενημερώνεται δείγμα προς δείγμα χρησιμοποιώντας τις BMA αναδρομές που βασίζονται στα σφάλματα. Εάν ο γραμμικός καταχωρητής δεν μπορεί να παράγει το επόμενο δείγμα, το μήκος του καταχωρητή αυξάνεται κατά μοναδικό τρόπο. Στην περίπτωση των μη γραμμικών καταχωρητών υπάρχουν αρκετές εναλλακτικές πέρα από την αύξηση των καθυστερήσεων των γραμμικών όρων. Προφανείς επιλογές συμπεριλαμβάνουν την εσαγωγή ενός νέου πρωταρχικού σήματος ή την αύξηση των καθυστερήσεων μη γραμμικών όρων. Η διάταξη των εναλλακτικών στον προτεινόμενο αλγόριθμο επιτυγχάνεται από την ολική διάταξη.

Μέρος IV

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ ΓΑΜΜΑ ΖΩΝΗΣ ΠΡΟΚΛΗΤΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ

Κεφάλαιο 10

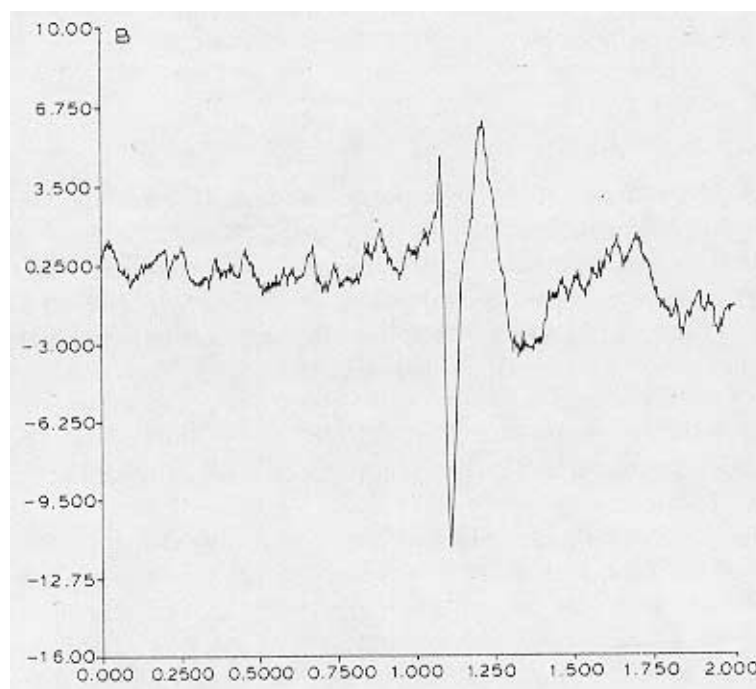
Προκλητά Δυναμικά

Η ηλεκτροεγκεφαλογραφική δραστηριότητα που προκύπτει ως αποτέλεσμα της διέγερσης με κάποιο ερέθισμα καλείται προκλητό δυναμικό (EP, evoked potential) ή δυναμικό σχετιζόμενο με ένα συμβάν (ERP, event-related potential). Το ERP συνήθως περιγράφεται ως σήμα που υπερτίθεται, χωρίς αλληλεπίδραση, με το ΗΕΓ. Μια ειδική κατηγορία ERP που καλούνται προκλητά δυναμικά σταθερής κατάστασης είναι αυτά που προκύπτουν από την εφαρμογή ενός ταχύτατα επαναλαμβανόμενου ερεθίσματος. Τα ERP που έχουν περισσότερο μελετηθεί είναι αυτά που σχετίζονται με οπτική, ακουστική ή σωματοαισθητική διέγερση και συνήθως αναφέρονται με τα αρχικά VEP, AEP ή SEP, αντίστοιχα.

Ένα από τα βασικότερα πλεονεκτήματα χρησιμοποίησης της μεθόδου των ERP για τη μελέτη του κεντρικού νευρικού συστήματος είναι η δυνατότητα επανάληψης της εφαρμοζόμενης διέγερσης πολλές φορές ώστε να επιτυγχάνεται σειρά επαναλαμβανόμενων μετρήσεων των απαντήσεων. Αυτό είναι απαραίτητο γιατί τα πλάτη των συνιστωσών των ERP είναι συχνά αρκετά μικρότερα από τα πλάτη των συνιστωσών της ηλεκτροεγκεφαλογραφικής δραστηριότητας υποβάθρου και κατά συνέπεια δεν γίνεται άμεσα διακριτή σε μία μόνο μέτρηση. Η πιο συνηθισμένη μέθοδος επεξεργασίας των ERP είναι η εύρεση της μέσης κυματομορφής (averaging) ενός αρκετά μεγάλου πλήθους μετρήσεων που είναι ευθυγραμμισμένες ως προς το χρόνο εφαρμογής της διέγερσης. Στο μέτρο που το προκλητό δυναμικό είναι ντετερμινιστικό και ανεξάρτητο της ΗΕΓ δραστηριότητας υποβάθρου, η μέθοδος προσφέρει μια αύξηση στο λόγο ισχύος προς θόρυβο που είναι ανάλογο του αριθμού των κυματομορφών για τις οποίες υπολογίζεται η μέση κυματομορφή. Η μέθοδος αυτή παραμένει η πιο δημοφιλής μέθοδος επεξεργασίας. Από τα πρώτα βήματα της έρευνας των ERP, έγινε φανερό ότι δεν ήταν απολύτως ντετερμινιστικά σήματα και επιπλέον επηρεάζονται από πολλούς εξωτερικούς παράγοντες, όπως η συνήθεια, η πρόβλεψη του ερεθίσματος και το περιβάλλον. Τα τελευταία χρόνια πολλοί ερευνητές έχουν μελετήσει μεθόδους που λαμβάνουν υπόψη τη μεταβλητότητα η οποία είναι παρούσα στα ERP. Αυτό έχει οδηγήσει στη σχεδίαση ειδικών φίλτρων που πραγματοποιούν εκτίμηση κυματομορφών, στην εισαγωγή μεθόδων ανίχνευσης συνιστωσών του προκλητού δυναμικού υπό την παρουσία της ΗΕΓ δραστηριότητας υποβάθρου, στη χρησιμοποίηση στατιστικών διαδικασιών, όπως η Ανάλυση Κυρίων Στοιχείων (Principal Component Analysis) και η ανάλυση διακυμάνσεων (ANOVA) και στην εφαρμογή μιας μεγάλης ποικιλίας ειδικών τεχνικών επεξεργασίας σήματος.

10.1 Χαρακτηριστικά των ERP

Για λόγους σχεδιασμού βέλτιστων τεχνικών επεξεργασίας των μετρήσεων και ανάλυσης των ERP είναι χρήσιμος ο χαρακτηρισμός τους σε σχέση με τις τυπικές παραμέτρους ενός σήματος. Πέρα από τα γενικά χαρακτηριστικά αυτών των παραμέτρων, η λεπτομερής φύση τους ποικίλει ανάλογα



Σχήμα 10.1: Παράδειγμα μέσης VEP κυματομορφής που αντιστοιχεί στο ηλεκτρόδιο P_z . Η διέγερση εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή $t = 1s$.

με τις ιδιαίτερες λεπτομέρειες της πειραματικής διαδικασίας.

Τα συνηθέστερα προκλητά δυναμικά είναι τα εξής:

- Οπτικά Προκλητά Δυναμικά

Τα Οπτικά Προκλητά Δυναμικά (Visual Evoked Potentials: VEP) επάγονται από την πρόκληση οπτικών ερεθισμάτων, όπως η λάμψη ενός φωτός ή η μεταβατική εμφάνιση ενός οπτικού προτύπου σε κάποιο τμήμα του οπτικού πεδίου. Παράδειγμα οπτικού προκλητού δυναμικού παρουσιάζεται στο Σχήμα 10.1. Οι συνιστώσες της μέσης κυματομορφής VEP εκτείνονται σε χρονικό διάστημα μεγαλύτερο των $300ms$. Κάποιες από τις πρώτες συνιστώσες διαρκούν $20ms$, κάτι που υπονοεί ότι το αντίστοιχο φασματικό περιεχόμενο επεκτείνεται πέρα των $50Hz$. Όταν γνωσιακές λειτουργίες απαιτούνται για την απάντηση σε ένα ερέθισμα, οι συνιστώσες συχνά εκτείνονται μέχρι τα $600ms$ ή και περισσότερο. Οι βραχείας διάρκειας συνιστώσες είναι παρατηρήσιμες μόνο νωρίς στην απάντηση και πιστεύεται ότι σχετίζονται με τη μετάδοση νευρωνικών κρουστικών παλμών από τον αμφιβλίστροειδή χιτώνα στον οπτικό φλοιό.

- Ακουστικά Προκλητά Δυναμικά

Τα Ακουστικά Προκλητά δυναμικά (Acoustic Evoked Potentials: AEP) γενικά παράγονται από ερεθίσματα όπως μία ριπή τόνων ή ένας σύντομος ξερός κρότος. Οι πρώτες συνιστώσες της μέσης κυματομορφής AEP έχουν πολύ μικρή διάρκεια και υποδηλώνουν την ύπαρξη φασματικών συνιστωσών μεγαλύτερων από $1000Hz$. Αυτές οι συνιστώσες σχετίζονται με την εκπομπή της απάντησης στο ερέθισμα από το ακουστικό νεύρο στο φλοιό. Οι τελευταίες συνιστώσες έχουν διάρκεια περισσότερο συγκρίσιμη με τα $20 - 40ms$ που παρατηρούνται στη μέση κυματομορφή VEP. Τα πλάτη των πρώτων συνιστωσών κυμαίνονται στην περιοχή των $0.1 - 0.5\mu V$, ενώ αυτά των επομένων συνιστωσών κυμαίνονται στην περιοχή των $1 - 20\mu V$.

- Σωματοαισθητικά Προκλητά Δυναμικά

Τα Σωματοαισθητικά Προκλητά Δυναμικά (Somatosensory Evoked Potentials: (SEP) παράγονται άμεσα από την εφαρμογή ενός μικρής διάρκειας ηλεκτρικού παλμού κατά τέτοιο τρόπο ώστε να διεγείρεται ένα συγκεκριμένο νεύρο. Μερικές από τις προκύπτουσες συνιστώσες όπως οι θετικές και αρνητικές αποκλίσεις στα 65 και 70msec, αντίστοιχα, πιστεύεται ότι προέρχονται από τους μύες, ενώ οι υπόλοιπες πιστεύεται ότι είναι νευρογενείς. Οι πρώτες συνιστώσες είναι μικρής διάρκειας της τάξης των 5 – 10msec, κάτι που σημαίνει ότι πιθανώς το σημαντικότερο μέρος του φασματικού περιεχομένου βρίσκεται πάνω από τα 100Hz. Οι περίοδοι των συνιστωσών που εμφανίζονται μετά τα 40msec είναι κατά πολύ μεγαλύτερες και είναι παρόμοιες σε μορφή με εκείνες της μέσης κυματομορφής VEP. Η διάρκεια της μέσης κυματομορφής SEP είναι περίπου 400msec.

Ο πληρέστερος χαρακτηρισμός μιας ηλεκτρικής κυματομορφής απαιτεί τη χρησιμοποίηση όλων των σχετικών διαθέσιμων πληροφοριών. Αυτές περιλαμβάνουν μεγέθη όπως η διακύμανση του πλάτους, το συχνοτικό περιεχόμενο, η χρονική διάρκεια του συμβάντος, χαρακτηριστικά άλλων σημάτων που είναι ταυτοχρόνως παρόντα, όπως η εγκεφαλογραφική δραστηριότητα υποβάθρου ή ο θόρυβος και οι χωρικές διακυμάνσεις του σήματος. Με αυτού του τύπου τις πληροφορίες είναι δυνατό να εφαρμοσθεί μια ποικιλία ειδικών τεχνικών επεξεργασίας σήματος που παρέχουν βελτιωμένη ανίχνευση, μέτρηση και απόδοση ανάλυσης.

Τα πλάτη των ERP ποικίλουν από δέκατα του μVolt , έως δεκάδες μVolt με τις μικρότερες τιμές να εμφανίζονται στις πρώτες συνιστώσες και υπερτίθενται στο υπόβαθρο της συνεχούς ηλεκτρικής δραστηριότητας που αντιστοιχεί στο HEF και έχει πλάτος της τάξης των 50 μVolt . Σε ορισμένες περιπτώσεις, ο λόγος του ERP δυναμικού προς το δυναμικό της HEF δραστηριότητας υποβάθρου μπορεί να είναι της τάξης του 1 : 1000, ο οποίος αντιστοιχεί σε -60dB λόγο σήματος προς θόρυβο. Στις περισσότερες περιπτώσεις ενδιαφέροντος, ο λόγος σήματος προς θόρυβο είναι λιγότερο από 1 : 1 (0dB). Αυτός ακριβώς είναι και ο λόγος που η μέτρηση και η ανάλυση των ERP είναι πολύ δύσκολη στην περίπτωση μιας καταγραφής.

Ο χαμηλός λόγος σήματος προς θόρυβο των πιο σημαντικών ERP έχει οδηγήσει στη χρησιμοποίηση της μεθόδου της μέσης κυματομορφής ως της μεθόδου ανάλυσης των ERP. Ένα σύνολο καταγραφών που αντιστοιχούν στις επαναλήψεις ενός πειράματος συνδυάζονται για να μειώσουν το θόρυβο ως προς το σήμα. Επειδή το σήμα δεν επαναλαμβάνεται ακριβώς κάθε φορά, υπάρχει απώλεια πληροφοριών. Ωστόσο, η μέθοδος της μέσης κυματομορφής παρέχει πολλές και χρήσιμες πληροφορίες για τις κυματομορφές των ERP.

Με βάση τη φύση των μέσων κυματομορφών ERP προκύπτει το συμπέρασμα ότι, όταν απουσιάζει κάποια σαφής γνωσιακή λειτουργία, τα ERP έχουν συνιστώσες που εκτείνονται μέχρι τα 450msec. Συνιστώσες που εμφανίζονται σε χρόνο μικρότερο από 20msec συναντώνται στις μέσες κυματομορφές AEP και σχετίζονται με απαντήσεις διαμέσου του στελέχους του εγκεφάλου. Τα χρονικά διαστήματα μεταξύ των κορυφών των πρώτων συνιστωσών (20 – 80msec) μπορεί να κυμαίνονται από 5 – 10msec, ενώ τα διαστήματα μεταξύ των κορυφών των συνιστωσών που εμφανίζονται αργότερα είναι της τάξης των 20 – 100msec. Τα ERP γενικά χαρακτηρίζονται από μεμονωμένες κορυφές υπερτιθεμένες σε μια βασική γραμμή χαμηλότερης συχνότητας που μεταβάλλεται θετικά ή αρνητικά. Τα παραπάνω υπονοούν ότι το φάσμα των ERP χαρακτηρίζεται από συγκεντρώσεις ενέργειας στη χαμηλή ζώνη και σε μια ξεχωριστή υψηλή συχνοτική ζώνη της οποίας η μέση συχνότητα μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με το χρόνο εμφάνισης (latency) των κορυφών της προκλητής δραστηριότητας. Οι χαμηλής συχνότητας μεταβολές αντιστοιχούν σε φασματικό περιεχόμενο της τάξης των 8 – 12Hz. Η ζώνη υψηλής συχνότητας μπορεί να βρίσκεται στην περιοχή ακόμη και πέρα από τα 100Hz για τμήματα που περιέχουν συνιστώσες με μικρό χρόνο εμφάνισης (latency) και στην περιοχή των 15 – 30Hz για συνιστώσες με μεγαλύτερο χρόνο εμφάνισης (latency). Ιδιαίτερη σπουδαιότητα από νευρολογική άποψη παρουσιάζει η ζώνη των

40Hz, η οποία αποτελεί και αντικείμενο μελέτης της παρούσας διατριβής, όπως θα παρουσιαστεί στα επόμενα κεφάλαια.

Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι υπάρχουν ενδείξεις πως τα ERP για μια συγκεκριμένη διέγερση δεν είναι ντετερμινιστικά και επίσης πως οι ακριβείς επαναλήψεις ενός πειράματος δεν δίνουν τις ίδιες ηλεκτρικές απαντήσεις στο φλοιό. Οι διαφορές εμφανίζονται ως αποκλίσεις στους χρόνους εμφάνισης (latency) των χαρακτηριστικών κορυφών, ως αλλαγές στα πλάτη των κορυφών και μερικές φορές ως αλλαγές στην κυματομορφή της απάντησης. Επομένως, για την καλύτερη ανάλυση των ERP είναι απαραίτητη η μελέτη της μεταβλητότητάς τους, κάτι που δεν είναι πάντοτε εύκολο να πραγματοποιηθεί.

10.2 Υπόδειγμα των προκλητών δυναμικών

Στις περισσότερες περιπτώσεις τα προκλητά δυναμικά προκύπτουν ως αποτέλεσμα της εφαρμογής μιας διέγερσης σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Γενικά, ο χρόνος εφαρμογής της διέγερσης είναι ανεξάρτητος από οποιαδήποτε συνιστώσα της ΗΕΓ δραστηριότητας υποβάθρου. Εάν θεωρήσουμε το προκλητό δυναμικό ως ένα σήμα $x_1(t)$, όπου $t \in [0, T]$ και $t = 0$ είναι η χρονική στιγμή της εφαρμογής του ερεθίσματος και την ΗΕΓ δραστηριότητα υποβάθρου κατά τη διάρκεια του διαστήματος παρατήρησης ως μία συνάρτηση μιας τυχαίας διαδικασίας $x_2(t)$, τότε, με την υπόθεση του προσθετικού μοντέλου, η μετρούμενη ποσότητα $r(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$r(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (10.1)$$

Για τις περισσότερες διαδικασίες υπολογισμού σημάτων, είναι επιθυμητό το περιεχόμενο σε κάθε παρατήρηση τμήμα $x_2(t)$ να είναι ασυσχέτιστο με το περιεχόμενο τμήμα $x_2(t)$ σε οποιαδήποτε άλλη παρατήρηση. Αυτό απλοποιεί κατά πολύ τον υπολογισμό ποσοτήτων, όπως οι συναρτήσεις συσχέτισης και οι φασματικές πυκνότητες. Η εξασφάλιση ότι τα τμήματα του $x_2(t)$ στις διάφορες μετρήσεις του προκλητού δυναμικού είναι ασυσχέτιστα επιτυγχάνεται με το σχεδιασμό των πειραμάτων κατά τέτοιο τρόπο ώστε να υπάρχει αρκετός χρόνος μεταξύ των εφαρμογών του ερεθίσματος. Το απαιτούμενο χρονικό διάστημα μεταξύ των ερεθισμάτων προσδιορίζεται κατά μεγάλο μέρος από τη διάρκεια των συνιστωσών χαμηλών συχνοτήτων της ΗΕΓ δραστηριότητας υποβάθρου και έχει τυπικές τιμές της τάξης των 1–2sec ή περισσότερο. Σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της ΗΕΓ δραστηριότητας υποβάθρου μπορεί να υπολογιστεί και να προσδιοριστεί το χρονικό διάστημα στο οποίο παραμένει σημαντική. Είναι επίσης κοινή πρακτική η εισαγωγή μιας τυχειότητας της τάξης του 0.1–0.5sec στο διάστημα μεταξύ διαδοχικών ερεθισμάτων ώστε να μειωθούν οι επιδράσεις της πρόβλεψης και ο συγχρονισμός του άλφα ρυθμού που εισάγουν 'προκατάληψη' στη μέτρηση. Κατά συνέπεια η εξ. (10.1) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$r(t) = x(t) + n(t) \quad (10.2)$$

όπου $r(t)$ είναι η μετρούμενη κυματομορφή, $x(t)$ είναι η ERP κυματομορφή και $n(t)$ η ΗΕΓ δραστηριότητα υποβάθρου μαζί με οποιονδήποτε άλλο θόρυβο που μπορεί να λαμβάνει χώρα στη διαδικασία της μέτρησης. Το προσθετικό μοντέλο που περιγράφεται από την εξ. (10.2) είναι το πιο συνηθισμένο μοντέλο που χρησιμοποιούν οι ερευνητές για την ερμηνεία και ανάλυση των προκλητών δυναμικών. Και αυτό γιατί, καταρχήν, υπάρχουν απευθείας μέθοδοι για την εξαγωγή των χαρακτηριστικών των σημάτων από σύνολα δεδομένων που αντιστοιχούν σε αυτό το μοντέλο και γενικότερα γιατί οδηγεί στην εξαγωγή χρήσιμων αποτελεσμάτων. Ωστόσο, πρέπει να έχει κανείς υπόψη του ότι το μοντέλο αυτό αποτελεί μια πρώτη προσέγγιση. Σημειώνεται ότι καθώς στο μέλλον θα αποκτούμε καλύτερη κατανόηση των υποκείμενων διεργασιών, είναι πιθανόν να γίνονται διαθέσιμα και βελτιωμένα μαθηματικά μοντέλα.

Η κυματομορφή $x(t)$ του προκλητού δυναμικού συχνά περιγράφεται ως ντετερμινιστικό σήμα που επαναλαμβάνεται με κάθε επανάληψη της εφαρμοζόμενης διέγερσης. Παρόμοια η διεργασία του θορύβου $n(t)$ γενικά μοντελοποιείται ως στατική τυχαία διαδικασία. Πολλοί ερευνητές έχουν μελετήσει τα στατιστικά χαρακτηριστικά της ΗΕΓ δραστηριότητας υποβάθρου. Παρόλο που υπάρχουν σημαντικές διακυμάνσεις, τα αποτελέσματα γενικά υποστηρίζουν την υπόθεση της στατικότητας και την ύπαρξη κανονικής τυχαίας κατανομής για χρονικά διαστήματα μερικών δευτερολέπτων ή λιγότερο. Στη βάση των υποθέσεων αυτών πολλές γνωστές τεχνικές ανίχνευσης σήματος, υπολογισμού κυματομορφών και αναγνώρισης προτύπων εφαρμόζονται άμεσα για την εξαγωγή πληροφοριών σχετικών με το σήμα από τις μετρούμενες ενθόρυβες κυματομορφές. Όταν συνδυάζονται δεδομένα από επαναλαμβανόμενες μετρήσεις, μετά την ελαχιστοποίηση των εποχών που περιέχουν προφανή παράσιτα, έχει βρεθεί ότι η στατιστική τους τείνει προς την κανονικότητα σε συμφωνία με το κεντρικό οριακό θεώρημα. Περισσότερο ρεαλιστικές υποθέσεις επιτρέπουν μεγαλύτερη τυχειότητα στο σήμα $x(t)$ και μη στατική συμπεριφορά στο ΗΕΓ. Την εξαγωγή πληροφοριών από αυτόν τον τύπο δεδομένων βοηθούν συνήθως υποθέσεις που αφορούν επιπρόσθετα χαρακτηριστικά των μετρούμενων δεδομένων, όπως η φύση της τυχειότητας του σήματος (π.χ. ο τύπος της κατανομής πιθανοτήτων της διακύμανσης του χρόνου εμφάνισης (latency) των κορυφών του προκλητού δυναμικού). Η απόδοση οποιασδήποτε τεχνικής επεξεργασίας κρίνεται στη βάση της χρησιμότητάς της για την κατανόηση και την ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Συχνά είναι απαραίτητο να δοκιμαστούν διάφορες μέθοδοι επεξεργασίας σήματος και να συγκριθούν τα αποτελέσματά τους ώστε να προσδιοριστεί η καλύτερη.

Το πρόβλημα για τα προκλητά δυναμικά διατυπώνεται ως εξής: με δεδομένο ένα σύνολο μετρήσεων που έγιναν με την υπόθεση της παρουσίας προσθετικού θορύβου, να βρεθεί ποια είναι η πιο αποτελεσματική μέθοδος για την εξαγωγή της πληροφορίας από το σύνολο των μετρήσεων.

10.3 Η μέθοδος της μέσης κυματομορφής

Η πιο ευρύτατα διαδεδομένη μέθοδος υπολογισμού των προκλητών δυναμικών είναι η μέθοδος της μέσης κυματομορφής συλλογής μετρήσεων (averaging). Εστω η μετρούμενη κυματομορφή ότι περιγράφεται ως άθροισμα του ντετερμινιστικού σήματος $x(t)$ (του προκλητού δυναμικού) και του θορύβου $n(t)$ (ΗΕΓ δραστηριότητα υποβάθρου). Είναι ρεαλιστική η υπόθεση ότι η ΗΕΓ δραστηριότητα υποβάθρου έχει μηδενική μέση τιμή. Τότε, η συνεχούς χρόνου κυματομορφή του n -οστού πειράματος μπορεί να εκφραστεί ως

$$r_n(t) = x(t) + n_n(t) \quad (10.3)$$

Οι κυματομορφές δειγματοληπτούνται με ρυθμό f_s . Έτσι η εξ. (10.3) γράφεται στη μορφή

$$r_n(m) = x(m) + n_n(m) \quad (10.4)$$

όπου $m \in \mathcal{N}$. Η εκτίμηση της μέσης τιμής της εξ. (10.4) γίνεται με τη μέθοδο του μέσου όρου ενός μεγάλου πλήθους N επαναλήψεων των μετρήσεων. Η μέση τιμή της μετρούμενης κυματομορφής τη χρονική στιγμή $t = m/f_s$ είναι

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N r_n(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n(m) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N n_n(m) \quad (10.5)$$

Λύνοντας ως προς το σήμα του προκλητού δυναμικού παίρνουμε

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N r_n(m) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N n_n(m) \quad (10.6)$$

ή

$$\bar{x}(m) = \bar{r}(m) - \bar{n}(m) \quad (10.7)$$

Υποθέτοντας ότι το σήμα δε μεταβάλλεται, δηλαδή ότι $\bar{x}(m) = x_m$, το μέσο ERP είναι το πραγματικό ERP μαζί με τη μέση τιμή του θορύβου $\bar{n}(m)$. Μπορεί στη συνέχεια να υποτεθεί ως καλή προσέγγιση ότι το $\bar{n}(m)$ έχει μηδενική μέση τιμή και διασπορά σ_n^2/N , όπου σ_n είναι η διασπορά της HEG δραστηριότητας υποβάθρου.

Η αποτελεσματικότητα της μεθόδου αποτιμάται με το λόγο σήματος προς θόρυβο SNR , δηλαδή το πηλίκο της ισχύος του σήματος προς την ισχύ του θορύβου. Πριν από την εφαρμογή της μεθόδου του μέσου όρου, το SNR σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή είναι:

$$SNR_1 = \frac{x^2(m)}{\sigma_n^2} \quad (10.8)$$

Μετά την εφαρμογή της μεθόδου του μέσου όρου, το SNR γίνεται

$$SNR_2 = \frac{q^2(m)}{\sigma_n^2/N} \quad (10.9)$$

Συνεπώς η βελτίωση του SNR είναι ευθέως ανάλογη με το N , το πλήθος των δειγμάτων στα οποία εφαρμόζεται η μέθοδος. Υποθέτουμε ότι η HEG δραστηριότητα υποβάθρου δεν αλλάζει σημαντικά με την εφαρμογή του ερεθίσματος. Ο υπολογισμός της ποσότητας σ_n συχνά γίνεται με την καταγραφή δεδομένων από ένα διάστημα 100 – 500 msec πριν από το ερέθισμα. Εάν έχει παρέλθει αρκετός χρόνος από το τελευταίο ερέθισμα και εάν το μεταξύ των ερεθισμάτων διάστημα είναι τυχαίο, τα δεδομένα αυτά δεν αναμένεται να περιέχουν συνιστώσες από το προηγούμενο προκλητό δυναμικό και η διασπορά τους θα είναι αυτή της HEG δραστηριότητας υποβάθρου. Έτσι, η διασπορά αυτή υπολογίζεται από το σύνολο δεδομένων $\{r(k)\}$:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (r(k) - \bar{r})^2 \quad (10.10)$$

Στο βαθμό που η HEG δραστηριότητα υποβάθρου είναι μια στατική τυχαία διαδικασία, η μέση τιμή της συλλογής σε διαφορετικές χρονικές στιγμές δεν θα διαφέρει σημαντικά. Υποθέτοντας ότι το σήμα είναι ντετερμινιστικό ως προς την εφαρμογή του ερεθίσματος, είναι επίσης δυνατό να υπολογιστεί η διασπορά της HEG δραστηριότητας υποβάθρου με το σχηματισμό συλλογής κυματομορφών αφαιρώντας κάθε κυματομορφή από την προηγούμενή της. Έτσι δημιουργείται μια συλλογή με μισές το πλήθος κυματομορφές καθεμία από τις οποίες δεν περιέχει προκλητό δυναμικό, αλλά περιέχει διπλάσια ισχύς θορύβου. Οι κυματομορφές αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό διαφόρων στατιστικών ιδιοτήτων της HEG δραστηριότητας υποβάθρου μεταξύ των οποίων και τη διασπορά (η οποία πρέπει να μειωθεί κατά έναν παράγοντα 2).

Η τυπική απόκλιση της εκτίμησης του σήματος που λαμβάνεται με τη μέθοδο της μέσης κυματομορφής προσδιορίζεται από την τυπική απόκλιση του προσθετικού θορύβου μετά την εφαρμογή της μεθόδου της μέσης κυματομορφής και δίνεται από τη σχέση:

$$SD = \frac{\sigma_n}{\sqrt{N}} \quad (10.11)$$

Από την εξ. (10.11) θα περίμενε κανείς ότι εάν ο υπολογισμός της μέσης κυματομορφής εφαρμοζόταν για 100 δείγματα τότε οι διακυμάνσεις στο πλάτος της μέσης κυματομορφής ERP λόγω των τυχαίων διακυμάνσεων της δραστηριότητας υποβάθρου του HEG θα μειωνόταν κατά ένα παράγοντα 10.

Οι διαδικασίες υπολογισμού της μέσης κυματομορφής μπορούν να χρησιμοποιηθούν μετά την εφαρμογή διαφόρων διαδικασιών προεπεξεργασίας των δεδομένων. Για παράδειγμα, οι κυματομορφές μπορούν, πριν από την εφαρμογή της μεθόδου της μέσης κυματομορφής, να διέλθουν από χαμηλοπερατά ή υψηλοπερατά φίλτρα ώστε να ελαχιστοποιηθούν συγκεκριμένες μεγάλες συνιστώσες οι οποίες ίσως κρύβουν λεπτομέρειες της μέσης κυματομορφής και οι οποίες θα ήταν αυτές που θα είχαν αναδειχθεί διαφορετικά. Επειδή η μέθοδος υπολογισμού της μέσης κυματομορφής είναι μια γραμμική διαδικασία, όπως και αρκετοί τύποι φιλτραρίσματος, είναι γενικά δυνατό να πάρει κανείς τα ίδια με τα προηγούμενα αποτελέσματα εάν πραγματοποιήσει το φιλτράρισμα μετά τον υπολογισμό της μέσης κυματομορφής. Σημειώνεται τέλος ότι ο συνδυασμός του υπολογισμού της μέσης κυματομορφής και του φιλτραρίσματος μπορεί συχνά να αποκαλύψει δομικά χαρακτηριστικά των ERP τα οποία δεν θα γινότουσαν εύκολα διακριτά με τη χρήση μόνο της μεθόδου υπολογισμού της μέσης κυματομορφής.

10.3.1 Απόρριψη παρασίτων

Μια από τις δυσκολίες που παρουσιάζονται κατά την εφαρμογή της μεθόδου υπολογισμού της μέσης κυματομορφής προκύπτει από το γεγονός ότι όλα τα σήματα της συλλογής συνδυάζονται με τον ίδιο συντελεστή βαρύτητας. Αυτό σημαίνει ότι κυματομορφές της συλλογής αρκετά διαφορετικές μεταξύ τους, συνεισφέρουν εξίσου στη μέση κυματομορφή. Η ανομοιογένεια των κυματομορφών μπορεί να οφείλεται στην παρουσία παρασίτων, όπως οι κινήσεις ματιών ή δυναμικά από τους μύες ή μπορεί να προκύπτει από μια σημαντική κυματομορφή στην ΗΕΓ δραστηριότητα υποβάθρου. Για αυτό πρέπει να λαμβάνονται προληπτικά μέτρα ώστε να ελαχιστοποιηθούν αυτές οι κυματομορφές πριν από την εφαρμογή της μεθόδου της μέσης κυματομορφής. Μία από τις μεθόδους που χρησιμοποιείται για το συστηματικό περιορισμό των κυματομορφών που εμπεριέχουν παράσιτα είναι η επιλεκτική μέθοδος υπολογισμού της μέσης κυματομορφής με ετεροδιακύμανση [38]. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, η μέση κυματομορφή υπολογίζεται ως το σταθμισμένο άθροισμα

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^N w_i r_i(t) \quad (10.12)$$

όπου ο w_i είναι θετικός συντελεστής στάθμισης για την i -οστή ERP κυματομορφή, $r_i(t)$ είναι η i -οστή μετρούμενη κυματομορφή και D ένας παράγοντας κανονικοποίησης που δίνεται από τη σχέση :

$$D = \sum_{i=1}^N w_i \quad (10.13)$$

Τα βάρη w_i υπολογίζονται με τον ακόλουθο τρόπο: Γίνεται καταγραφή ERP κυματομορφών μεγάλης διάρκειας που συμπεριλαμβάνουν ένα διάστημα πριν από την εφαρμογή του ερεθίσματος. Στη συνέχεια υπολογίζεται το φάσμα του θορύβου από το μέσο όρο των περιοδογραμμάτων που λαμβάνονται από κάθε κυματομορφή μετά την αφαίρεση της μέσης κυματομορφής της συλλογής, δηλαδή :

$$\hat{X}_n(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{περιοδόγραμμα του } (x_i(t) - \bar{x}(t)) \quad (10.14)$$

Στη συνέχεια σχεδιάζεται ένα φίλτρο λεύκανσης χρησιμοποιώντας το αντίστροφο της τετραγωνικής ρίζας του $\hat{X}_n(f)$. Ακολουθεί επεξεργασία των πραγματικών δεδομένων από το φίλτρο λεύκανσης και τους συντελεστές συνδιακύμανσης γ_i μεταξύ κάθε κυματομορφής και της μέσης κυματομορφής όλων των υπολοίπων κυματομορφών. Ο συντελεστής στάθμισης για κάθε κυματο-

μορφή δίνεται από τη σχέση:

$$w_i = \begin{cases} 0, & \gamma_i \leq 0 \\ \gamma_i, & 0 \leq \gamma_i \leq C \\ C, & \gamma_i > C \end{cases} \quad (10.15)$$

Η τιμή του C επιλέγεται εμπειρικά με τυπική τιμή το 0.8. Με τη μέθοδο αυτή, αν και είναι υπολογιστικά απαιτητική, επιτυγχάνεται αρκετά σημαντικό ποσοστό απόρριψης των κυματομορφών που εμπεριέχουν παράσιτα.

10.4 Μέθοδοι ανάλυσης μονήρων προκλητών δυναμικών

Η μέθοδος υπολογισμού της μέσης κυματομορφής έχει ως αποτέλεσμα την απώλεια πληροφοριών σχετικά με τη μεταβλητότητα της απάντησης από προσπάθεια σε προσπάθεια. Μετρήσεις της μεταβλητότητας του πλάτους είναι σχετικά εύκολο να γίνουν με τον υπολογισμό του αθροίσματος των τετραγώνων για κάθε δείγμα εισόδου, έτσι ώστε να μπορεί να υπολογιστεί η τυπική απόκλιση για κάθε δείγμα και να σχεδιαστεί μαζί με τη μέση κυματομορφή στο τέλος της καταγραφής. Ωστόσο, είναι πιθανόν να μεταβάλλεται από προσπάθεια σε προσπάθεια ο χρόνος εμφάνισης (latency) των συνιστωσών της απάντησης με αποτέλεσμα να προκύπτει υποβαθμισμένη εκτίμηση του προκλητού δυναμικού. Πραγματικά, μια μέση κυματομορφή που σχηματίζεται από σειρές απαντήσεων των οποίων ο χρόνος εμφάνισης είναι μεταβλητός μπορεί να μη διαχωρίζεται από αυτή που σχηματίζεται από σειρές των οποίων το πλάτος μεταβάλλεται. Έχει προταθεί ένα πλήθος διαφορετικών μεθόδων για την ανίχνευση και τον υπολογισμό της μεταβλητότητας του χρόνου εμφάνισης και του πλάτους μαζί με διαδικασίες για τη διόρθωση της μεταβλητότητας αυτής.

Παραδείγματα αποτελούν οι μέθοδοι ταιριάσματος προτύπου (template matching). Αυτές συνίστανται στην ετεροσυσχέτιση των μονήρων καταγραφών με μια πρότυπη κυματομορφή για διαδοχικές χρονικές ολισθήσεις της μονήρους καταγραφής. Η χρονική ολίσθηση που παράγει τη μέγιστη τιμή της ετεροσυσχέτισης προσδιορίζει το σημείο στο οποίο η πρότυπη κυματομορφή και η καταγραφή ταιριάζουν περισσότερο. Ως αρχικό πρότυπη συνήθως επιλέγεται η μέση κυματομορφή, χωρίς αυτό να είναι δεσμευτικό. Μετά τον υπολογισμό της ετεροσυσχέτισης, πραγματοποιείται ολίσθηση των μονήρων καταγραφών, έτσι ώστε να ευθυγραμμιστούν τα σημεία στα οποία παρατηρείται μέγιστη ετεροσυσχέτιση. Στη συνέχεια, υπολογίζεται μια νέα μέση κυματομορφή, η οποία χρησιμοποιείται ως νέα πρότυπη κυματομορφή που θα ετεροσυσχετιστεί με τις μονήρεις καταγραφές κ.ο.κ. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρις ότου η ετεροσυσχέτιση ξεπεράσει μια οριακή τιμή. Ωστόσο, η μέθοδος αυτή παρουσιάζει αρκετά προβλήματα, όπως για παράδειγμα το γεγονός ότι επηρεάζεται ισχυρά από αποκρίσεις μεγάλου πλάτους, ειδικά από αυτές που έχουν και μεγάλη διάρκεια. Πολλές προσπάθειες γίνονται διεθνώς για την επίτευξη επιτυχούς ανάλυσης των μονήρων καταγραφών, όπως για παράδειγμα με χρήση νευρωνικών δικτύων [96]. Γεγονός είναι πάντως ότι η ανάλυσή τους παρέχει σημαντική πληροφορία για την μεταβλητότητα από προσπάθεια σε προσπάθεια τόσο του πλάτους όσο και του χρόνου εμφάνισης (latency). Η σύγκριση των πληροφοριών αυτών που λαμβάνονται από τα προκλητά δυναμικά μπορεί να βοηθήσουν σε μεγάλο βαθμό την κατανόηση της παθοφυσιολογίας των νευρολογικών ασθενειών.

10.5 Σύγκριση της μεθόδου της μέσης κυματομορφής με εναλλακτικές μεθόδους

Όπως αναφέρθηκε και προηγούμενα, η μέθοδος της μέσης κυματομορφής βασίζεται στο μοντέλο που υποθέτει ότι η καταγραφόμενη ηλεκτρική δραστηριότητα μπορεί να περιγραφεί ως η επαλληλία του σήματος (του προκλητού δυναμικού) και του θορύβου (HEF υποβάθρου). Οι επιπλέον

υποθέσεις ότι το επαγόμενο από το ίδιο ερέθισμα σήμα είναι σταθερό από προσπάθεια σε προσπάθεια και ότι η ΗΕΓ δραστηριότητα είναι τυχαία και ασυσχέτιστη με το προκλητό δυναμικό έχουν ως αποτέλεσμα το άθροισμα των αποκρίσεων μετά από κάθε διέγερση να ενισχύει τη συνιστώσα του σήματος και να μειώνει το θόρυβο. Η διαδικασία αυτή αναδεικνύει ένα μέσο προκλητό δυναμικό του οποίου τα χαρακτηριστικά καθορίζονται από την πηγή παραγωγής του. Είναι σημαντικό να παρατηρήσει κανείς ότι η μέση αυτή κυματομορφή αποτελεί εκτίμηση της δραστηριότητας που σχετίζεται με την πηγή παραγωγής του, παρά το πραγματικό σήμα που θα καταγραφόταν σε ένα μόνο νευρώνα. Περαιτέρω βελτίωση της εκτίμησης αυτής επιτυγχάνεται είτε με αύξηση των προσπαθειών είτε με φιλτράρισμα των κυματομορφών (τόσο των καταγραφών όσο και της μέσης κυματομορφής) με σκοπό την απομάκρυνση όσο είναι δυνατό μεγαλύτερης ποσότητας θορύβου. Η χρήση των φίλτρων αυτών συνήθως αγνοεί το γεγονός ότι οι συχνότητες των συνιστωσών των κυματομορφών εμφανίζουν την τάση να μειώνονται καθώς ο χρόνος μετά την εμφάνιση της διέγερσης αυξάνει. Έτσι, ένα προκλητό δυναμικό μπορεί καλύτερα να θεωρηθεί ως συνδυασμός σημάτων που αναπαριστούν την απάντηση του εγκεφάλου καθώς εκφορτίσεις νευρώνων πραγματοποιούνται από χαμηλές σε βαθμιαία υψηλότερες εγκεφαλικές δομές.

Οι προηγούμενες παρατηρήσεις ισχύουν και για την εναλλακτική μέθοδο του *a posteriori* Wiener φιλτραρίσματος. Ο De Weerd και οι συνεργάτες του [23], [24] αντιπρότειναν εναλλακτικά το χρονικά μεταβαλλόμενο φιλτράρισμα που επιτρέπει χρονικές διαφοροποιήσεις των συχνοτικών συνιστωσών, ο συνδυασμός των οποίων σχηματίζει το προκλητό δυναμικό. Ο De Weerd παρατηρεί πως καμία *a priori* πληροφορία για το σήμα και το θόρυβο δεν είναι διαθέσιμες όταν καταγράφονται τα προκλητά δυναμικά και κατά συνέπεια το πρόβλημα οποιασδήποτε τεχνικής μέσης κυματομορφής αποτελεί πρόβλημα εκτίμησης παρά πρόβλημα ανίχνευσης σήματος κρυμμένου στο θόρυβο. Το χρονικά μεταβαλλόμενο φιλτράρισμα διευθετεί το πρόβλημα αυτό θεωρώντας ότι το σήμα σε κάθε μονήρες προκλητό δυναμικό αποτελείται από επικαλυπτόμενες συνιστώσες, οι οποίες μπορούν να περιγραφούν από μαθηματικές εξισώσεις. Μια πρόσθετη υπόθεση είναι ότι το σήμα δε μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια του χρόνου που απαιτείται για τη λήψη των καταγραφών. Η υπόθεση αυτή παραβιάζεται εάν παρατηρηθεί εθισμός ή εάν ατομικές μεταβλητές, όπως η προσοχή, τροποποιούν το δυναμικό κατά κάποιο τρόπο. Ωστόσο, επειδή ο αριθμός των απαιτούμενων επαναλήψεων για την εκτίμηση του σήματος είναι σχετικά μικρός, η παραβίαση της παραπάνω υπόθεσης δεν είναι καθοριστική. Ο De Weerd και οι συνεργάτες του υποστηρίζουν ότι η τεχνική δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν ο λόγος σήμα προς θόρυβο είναι χαμηλός, καθώς παράγει παραπλανητικά αποτελέσματα. Έτσι, η πλέον αξιόπιστη χρησιμοποιούμενη σήμερα μέθοδος είναι αυτή της μέσης κυματομορφής.

10.6 Γνωσιακά Σήματα

Τα εγκεφαλογραφικά προκλητά δυναμικά έχουν ευρύτατα χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη της εγκεφαλογραφικής δραστηριότητας που σχετίζεται με υψηλές νοητικές λειτουργίες. Με τις υπάρχουσες μεθόδους είμαστε σε θέση να εντοπίσουμε ίχνη του χρονισμού και της θέσης της μαζικής νευρωνικής δραστηριότητας που σχετίζεται με γνωσιακές λειτουργίες. Όμως, παρόλη την πρόοδο των τελευταίων ετών, βρισκόμαστε σε φάση αναμονής ανάπτυξης νέων ισχυρών εργαλείων για τη μέτρηση σημάτων νευρογνωσιακών διεργασιών και εντοπισμού των πηγών τους στον εγκέφαλο.

Τα προκλητά δυναμικά είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για τη μελέτη μαζικής νευρωνικής δραστηριότητας κατά τη διάρκεια γνωσιακών λειτουργιών. Η υπόθεση εργασίας είναι ότι μια σημαντική μεταβολή στο χρόνο εμφάνισης ή στο πλάτος μεταξύ πειραματικών συνθηκών που διαφέρουν ως προς μια συγκεκριμένη γνωσιακή θεώρηση της απάντησης σε ένα πείραμα, ανταναχλά τις διαφορές στη μαζική νευρωνική δραστηριότητα που σχετίζεται με αυτή τη γνωσιακή διαδικασία. Έτσι, εφόσον η μέση κυματομορφή είναι συγχρονισμένη ως προς το ερέθισμα ή ως προς την απάντηση, γίνεται δυνατή η εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με την ακολουθία και το χρονισμό των διαδι-

κασίων που σχετίζονται με το πείραμα, όπως η προσδοκία πριν από το ερέθισμα, η προετοιμασία, η κωδικοποίηση των χαρακτηριστικών του ερεθίσματος, η αξιολόγηση της έννοιας του ερεθίσματος, η επιλογή της απάντησης και η εκτέλεση. Οι συνιστώσες του προκλητού δυναμικού που επηρεάζονται κύρια από τις φυσικές ιδιότητες του ερεθίσματος καλούνται εξωγενείς, ενώ αυτές που συμμεταβάλλονται κύρια με γνωσιακούς παράγοντες καλούνται ενδογενείς. Στην πραγματικότητα, οι περισσότερες συνιστώσες είναι ευαίσθητες και στους εξωγενείς και στους ενδογενείς παράγοντες.

10.6.1 Βασικές υποθέσεις για την εφαρμογή της μεθόδου των προκλητών δυναμικών

Οι βασικές υποθέσεις της μεθόδου είναι ότι οι γνωσιακές λειτουργίες μπορούν να μετρηθούν και ότι οι επικαλυπτόμενες συνιστώσες μπορούν να διαχωρισθούν και μάλιστα οι γνωσιακοί παράγοντες μπορούν να απομονωθούν. Τα νοητικά γεγονότα δεν μπορούν να μετρηθούν απευθείας. Μπορούμε να παρατηρήσουμε μόνο τη συμπεριφορική και τη νευρωνική δραστηριότητα που σχετίζονται με αυτά. Ψυχολογικές μελέτες μετρούν συμπεριφορικά μεγέθη, όπως ο χρόνος αντίδρασης για να ορίσουν τα στάδια της γνωσιακής επεξεργασίας και να εκφέρουν συμπεράσματα σχετικά με τη φύση τους και το χρονισμό τους. Η εγκυρότητα κάθε γνωσιακής μελέτης εξαρτάται από την αποτελεσματικότητα του πειραματικού σχεδιασμού και τους ελέγχους στη διαχείριση ενός γνωσιακού παράγοντα διατηρώντας όλους τους υπόλοιπους σταθερούς. Για παράδειγμα, ένα τυπικό πείραμα μνήμης συμπεριλαμβάνει όχι μόνο τη μνήμη, αλλά επίσης και προσδοκία και προετοιμασία και κωδικοποίηση των χαρακτηριστικών του ερεθίσματος και σύγκριση με τη μνήμη και επιλογή και εκτέλεση της απόκρισης. Η μελέτη των εγκεφαλικών σημάτων που σχετίζονται με τη γνωσιακή λειτουργία περιπλέκεται επιπλέον από την περισσότερο πολύπλοκη ευαισθησία των κινήσεων απόκρισης.

Ο χρονισμός των νευρογνωσιακών διεργασιών είναι σύμφωνος. Η μέθοδος της μέσης κυματομορφής υποθέτει ότι οι σχετικές με το πείραμα γνωσιακές διαδικασίες δεν μεταβάλλονται στο χρόνο από επανάληψη σε επανάληψη. Εάν οι νευρογνωσιακές λειτουργίες ήταν πραγματικά ντετερμινιστικές, τότε η υπόθεση αυτή θα ήταν λογική. Ωστόσο, δεν υπάρχουν επαρκείς ενδείξεις για την υποστήριξη μιας τέτοιας υπόθεσης. Οι μεταβολές από επανάληψη σε επανάληψη στο χρονισμό των νευρογνωσιακών διεργασιών επηρεάζουν τόσο το χρόνο απόκρισης όσο και το πλάτος μιας ERP συνιστώσας. Το μέτρο του ολοκληρώματος των τιμών (εμβαδόν) ενός κύματος χρησιμοποιείται αρκετές φορές για να αμβλύνει την υπερβολική ευαισθησία των μετρήσεων του πλάτους στις διακυμάνσεις αυτές. Επίσης, έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι διόρθωσης των χρόνων εμφάνισης (latency) συγκεκριμένων κορυφών χρησιμοποιώντας τα δεδομένα μονήρων καταγραφών. Ωστόσο, χωρίς προσεκτικό φιλτράρισμα, η αύξηση πλάτους που παράγεται από τις διαδικασίες διόρθωσης του χρόνου εμφάνισης μπορεί να επηρεαστεί από ασυσχέτιστη ΗΕΓ δραστηριότητα, συνήθως δραστηριότητα της άλφα ζώνης.

Η μέτρηση του χρόνου εμφάνισης των κορυφών είναι ένας άλλος σημαντικός παράγοντας, ιδιαίτερα στις χρονομετρικές μεθόδους (μέθοδοι που καταλήγουν στον προσδιορισμό της ακολουθίας και του χρονισμού των συνιστωσών της γνωσιακής επεξεργασίας). Ο χρόνος καθυστέρησης μετρίεται ως προς μία κορυφή που επιλέγεται είτε με οπτική θεώρηση είτε αυτόματα ως η κορυφή με το μέγιστο πλάτος εντός μιας ευρείας περιοχής χρονικών καθυστερήσεων. Ωστόσο, η παρουσία υψηλών συχνοτήτων μπορεί να προκαλέσει λανθασμένες διακυμάνσεις στους χρόνους καθυστέρησης. Για αυτό απαιτείται προσεκτικό προηγούμενο φιλτράρισμα χαμηλών συχνοτήτων.

Τα θέματα της εκμάθησης, του αυτοματισμού, της κούρασης και της συνήθειας πρέπει να λαμβάνονται υπόψη όταν τα πειράματα επαναλαμβάνονται εκατοντάδες φορές. Αρκετές φορές ακολουθεί δεύτερη σειρά μετρήσεων ώστε να διαπιστωθεί εάν τα καταγραφόμενα δυναμικά οφείλονται σε κόπωση ή σε αυτοματισμό.

Η υπόθεση για τη μέση ERP κυματομορφή είναι ότι αποτελεί γραμμικό συνδυασμό χωρικά και χρονικά επικαλυπτόμενων συνιστωσών που παράγονται από συγκεκριμένα νευρωνικά συστήματα. Ωστόσο, θα ήταν αφελές να θεωρήσει κανείς ότι οι κορυφές στη μέση ERP κυματομορφή απεικονίζουν τις διακριτές συνιστώσες. Έτσι, η ακριβής μέτρηση των επικαλυπτόμενων συνιστωσών στη συνισταμένη κυματομορφή είναι προβληματική. Σε μερικές περιπτώσεις, σχετικά απλές πειραματικές ή αναλυτικές μέθοδοι μπορεί να είναι αποτελεσματικές στο διαχωρισμό ξεχωριστών συνιστωσών. Ωστόσο, δεν είναι συχνά δυνατός ο διαχωρισμός των επικαλυπτόμενων συνιστωσών από απλές μεθόδους. Ως γενικότερη λύση στο πρόβλημα αυτό, αποτελεί η χρήση της μεθόδου της Ανάλυσης Κυρίων Συνιστωσών (Principal Component Analysis (PCA)) για την ανάδειξη ανεξάρτητων συνιστωσών. Η PCA προσδιορίζει στατιστικά ανεξάρτητους παράγοντες που αντιπροσωπεύουν διαφορετικές πηγές διακύμανσης στα δεδομένα σχηματίζοντας γραμμικούς συνδυασμούς των ERP πλατών σε κάθε χρονική στιγμή. Οι παράγοντες αυτοί είναι κατά μέγιστο βαθμό ασυσχέτιστοι μεταξύ τους και περιγράφουν το μεγαλύτερο ποσό διακύμανσης που παρατηρείται στα δεδομένα. Συνήθως, 4 – 10 παράγοντες περιγράφουν το πολυπλοκότητα των πηγών της διακύμανσης. Παρά τη δημοτικότητά της, η PCA μέθοδος έχει ενδογενείς περιορισμούς. Συγκεκριμένα, είναι δύσκολο να προσδιοριστεί ποια πειραματική μεταβλητή ή πηγή διακύμανσης αντιπροσωπεύει ένας συγκεκριμένος παράγοντας.

10.6.2 Μεθοδολογικές απαιτήσεις

Όπως σε κάθε πείραμα, έτσι και στην περίπτωση των γνωσιακών σημάτων είναι βασικός ο έλεγχος όλων των παραγόντων που δεν σχετίζονται άμεσα με την επιδιωκόμενη πειραματική μελέτη. Μάλιστα απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή στον πειραματικό έλεγχο κατά τις νευρογνωσιακές μελέτες, αφού τα εγκεφαλικά σήματα είναι πολύ ευαίσθητα σε πολλούς παράγοντες και τα νευρογνωσιακά σήματα είναι πολύ μικρά σε σχέση με τη δραστηριότητα υποβάθρου. Τα πιο σημαντικά θέματα αποτελούν η ελαχιστοποίηση των παρασίων και ο έλεγχος των φυσιολογικών και πειραματικών παραγόντων.

Η παραμόρφωση των εγκεφαλικών σημάτων από μη νευρωνικά δυναμικά είναι ένα σοβαρό πρόβλημα. Οι κύριες πηγές των φυσιολογικών παρασίων είναι οι κινήσεις των ματιών και η μυϊκή δραστηριότητα, ιδιαίτερα των μυών του κεφαλιού. Η ανίχνευση και αφαίρεση των παρασίων πραγματοποιείται με οπτική θεώρηση ή με αυτόματο τρόπο. Έχουν αναπτυχθεί ψηφιακοί αλγόριθμοι [69], [70] για την απομάκρυνση των επιδράσεων των παρασίων τόσο από τη μέση ERP κυματομορφή, όσο και από τις μονήρεις καταγραφές. Ωστόσο, οι μικρές μη ανιχνεύσιμες κινήσεις ματιών ή μυϊκής δραστηριότητας οι οποίες μπορεί να συσχετίζονται στο χρόνο με το ερέθισμα ή την απόκριση αθροίζονται και μπορούν να οδηγήσουν σε εσφαλμένα αποτελέσματα. Σημειώνεται πάντως ότι είναι πιθανό, κινήσεις ματιών και μυϊκή δραστηριότητα να συνοδεύουν τις γνωσιακές λειτουργίες και να σχετίζονται με γνωσιακές επεξεργασίες και κατά συνέπεια να χρησιμοποιηθούν για το διαχωρισμό διαφορετικών γνωσιακών διαδικασιών.

Ένα σημαντικό θέμα στον έλεγχο των πειραματικών συνθηκών είναι οι γενικοί παράγοντες φυσιολογίας. Τα εγκεφαλογραφικά σήματα ποικίλουν ανάλογα με την ηλικία, τη δεξιοχειρία-αριστεροχειρία, το γένος, την κούραση, το επίπεδο διέγερσης, τη χρήση καφεΐνης, νικοτίνης, αλκοόλ και διαφόρων φαρμάκων. Ωστόσο, είναι πολύ δύσκολο να διαχωριστούν οι επιδράσεις που σχετίζονται με συγκεκριμένη επεξεργασία πληροφορίας από εκείνες που αντανακλούν το συνολικό επίπεδο δραστηριότητας του κεντρικού νευρικού συστήματος. Γι' αυτό, ο έλεγχος των παραγόντων αυτών πραγματοποιείται μέσω του ελέγχου της δυσκολίας του πειράματος και των γενικών παραγόντων φυσιολογίας.

Το ουσιαστικό θέμα του πειραματικού σχεδιασμού και ελέγχου βασίζεται στην εγκυρότητα της υπόθεσης ότι οι πειραματικές συνθήκες, στην πραγματικότητα, αφορούν μια συγκεκριμένη νευρογνωσιακή διαδικασία και ότι τα αποτελέσματα δεν οφείλονται σε παράγοντες όχι άμεσα σχετιζό-

μενους με αυτή τη διαδικασία. Οι πειραματικές διαδικασίες πρέπει να είναι απλές και σύντομες, ώστε να μειωθεί η πιθανότητα διαφοροποιήσεων από προσπάθεια σε προσπάθεια και η πιθανότητα ύπαρξης στρατηγικής, αλλά αρκετά καλά σχεδιασμένες ώστε να επιτυγχάνεται η πλήρης προσοχή. Οι συνθήκες ενός πειράματος θα πρέπει να ελέγχονται για ασυσχέτιστες διεγέρσεις, για παράγοντες που σχετίζονται με τη φυσιολογία και παράγοντες που σχετίζονται με την απόκριση κατά το σχεδιασμό του πειράματος και για την ευθυγράμμιση των συνόλων δεδομένων μετά την εκτέλεση των πειραμάτων. Οι παράγοντες αυτοί συμπεριλαμβάνουν τις φυσικές ιδιότητες, τη συχνότητα και τη διάταξη των ερεθισμάτων, τη δυσκολία της διαδικασίας, τον αυτοματισμό, το χρονισμό, τη διάρκεια, το είδος των αποκρίσεων κλπ. Η δυσκολία της προσπάθειας τροποποιείται σύμφωνα με τις μεταβολές στην απόδοση, η οποία αξιολογείται με συμπεριφορικά μεγέθη, όπως ο χρόνος απόκρισης και ο ρυθμός λαθών. Εάν τα πλάτη των ERP μετρώνται ως προς τη βασική γραμμή πριν από το ερέθισμα, οι επιδράσεις της προσδοκίας πρέπει να λαμβάνονται υπόψη, ειδικά όταν οι αποστάσεις μεταξύ των ερεθισμάτων είναι σταθερές.

Κεφάλαιο 11

Μη Γραμμικός Ενεργειακός Τελεστής

Η καταγραφόμενη ηλεκτροεγκεφαλογραφική δραστηριότητα που αντανακλά τις γνωσιακές λειτουργίες του εγκεφάλου παρουσιάζει συγκεκριμένο ενεργειακό περιεχόμενο σε συγκεκριμένες φασματικές ζώνες, το οποίο επιπροσθέτως είναι και χρονικά μεταβαλλόμενο. Για τη μελέτη του χρησιμοποιούμε τον μη γραμμικό ενεργειακό τελεστή. Ο μη γραμμικός ενεργειακός τελεστής υπολογίζει το ενεργειακό περιεχόμενο ενός γραμμικού ταλαντωτή. Έχει χρησιμοποιηθεί επίσης και για τον υπολογισμό της στιγμιαίας συχνότητας και του στιγμιαίου πλάτους ενός σήματος διαμορφωμένου κατά συχνότητα και πλάτος [81].

11.1 Ορισμοί

Έστω $x(t)$ μια πραγματική διαδικασία με περιορισμένο φασματικό εύρος ($S_{xx}(\omega) = 0$ για $|\omega| > B$) και $x(nT_s)$ τα δείγματα της $x(t)$ με περίοδο δειγματοληψίας $T_s < \pi/B$. Για λόγους απλούστευσης, το T_s στη συνέχεια παραλείπεται από το σήμα διακριτού χρόνου.

Και για τα συνεχούς και για τα διακριτού χρόνου σήματα, ο Kaiser [59] όρισε το μη γραμμικό ενεργειακό τελεστή. Για το συνεχούς χρόνου σήμα $x(t)$ ο μη γραμμικός ενεργειακός τελεστής ορίζεται ως:

$$\Psi_c[x(t)] \triangleq [\dot{x}(t)]^2 - x(t)\ddot{x}(t) \quad (11.1)$$

όπου $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Στην περίπτωση του σήματος διακριτού χρόνου ο τελεστής ορίζεται ως:

$$\Psi_d[x(n)] \triangleq x^2(n) - x(n-1)x(n+1) \quad (11.2)$$

Και οι δύο τελεστές Ψ_c και Ψ_d είναι μη γραμμικοί και αμετάβλητοι στις μεταθέσεις. Προτάθηκαν για πρώτη φορά από τον Kaiser και χρησιμοποιήθηκαν για τον προσδιορισμό της ενέργειας απλών αρμονικών ταλαντωτών. Πιο συγκεκριμένα, εάν έχουμε έναν ιδανικό γραμμικό ταλαντωτή με μάζα m , σταθερά ελατηρίου k και συχνότητα ταλάντωσης ω_c ($k = m\omega_c^2$) και η θέση της μάζας m δίνεται από τη σχέση $x(t) = A \cos(\omega_c t + \theta)$ τότε η ολική (κινητική και δυναμική) ενέργεια του ταλαντωτή ισούται με $(m(\dot{x})^2 + kx^2)/2 = (m/2)A^2\omega_c^2$, είναι δηλαδή ανάλογη του τετραγώνου του γινομένου πλάτους - συχνότητας. Επιπλέον, η εφαρμογή του μη γραμμικού ενεργειακού τελεστή Ψ_c στο σήμα $x(t)$ οδηγεί στον υπολογισμό της ενέργειας (ανά μισή μονάδα μάζας) της πηγής που παρήγαγε το σήμα:

$$\Psi_c[A \cos(\omega_c t + \theta)] = (A\omega_c)^2 \quad (11.3)$$

για κάθε A και ω_c .

Οι μη γραμμικοί ενεργειακοί τελεστές είναι επίσης χρήσιμοι για την ανάλυση σημάτων ταλαντωτών με μεταβαλλόμενο πλάτος και συχνότητα. Ειδικότερα, η εφαρμογή του τελεστή Ψ_c στο κατά πλάτος και φάση διαμορφωμένο (AM-FM) σήμα $x(t) = a(t) \cdot \cos(\phi(t)) = a(t) \cos(\omega_c t + \omega_m \int_0^t q(\tau) d\tau + \theta)$ οδηγεί στον υπολογισμό προσεγγιστικά του τετραγώνου του γινομένου του πλάτους $a(t)$ με τη στιγμιαία συχνότητα ω_i :

$$\Psi_c[a(t) \cos(\int_0^t \omega_i(\tau) d\tau + \theta)] \simeq [a(t)\omega_i(t)]^2 \quad (11.4)$$

υποθέτοντας ότι τα σήματα $a(t)$ και $\omega_i(t)$ δεν μεταβάλλονται ούτε πολύ γρήγορα ούτε πολύ στο χρόνο σε σύγκριση με τη συχνότητα του φέροντος ω_c . Σημειώνεται ότι ο συνδυασμός του προηγούμενου αποτελέσματος με το αντίστοιχο που προκύπτει από την εφαρμογή του ίδιου τελεστή και στην παράγωγο του AM-FM σήματος, οδηγεί στον υπολογισμό ξεχωριστά της συχνότητας και ξεχωριστά του πλάτους του σήματος. Ο αντίστοιχος αλγόριθμος είναι ο αλγόριθμος διαχωρισμού της ενέργειας [81]. Παρομοίως για το διακριτό σήμα $x(n) = r(n) \cos \phi(n)$, έχουμε $\Psi_d[x(n)] = [r(n)\omega(n)]^2$, όπου με ω συμβολίζεται η στιγμιαία συχνότητα ($\omega(t) = d\phi/dt$) και με r η στιγμιαία ακτίνα. Στο εξής θα περιοριστούμε στον τελεστή που εφαρμόζεται στα σήματα διακριτού χρόνου, τον οποίο και θα συμβολίζουμε με Ψ .

11.2 Στατιστική Ερμηνεία

Έστω $x(t)$ ένας γραμμικός συνδυασμός δύο σημάτων $x_1(t)$ και $x_2(t)$, ο οποίος στο χώρο των διακριτών σημάτων γράφεται $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$. Εφαρμόζοντας τον μη γραμμικό ενεργειακό τελεστή έχουμε [87]:

$$\begin{aligned} \Psi[x(n)] &= \Psi[x_1(n) + x_2(n)] \\ &= \Psi[x_1(n)] + \Psi[x_2(n)] \\ &\quad + \{2x_1(n)x_2(n) - x_1(n-1)x_2(n+1) \\ &\quad - x_1(n+1)x_2(n-1)\} \end{aligned} \quad (11.5)$$

Εάν τα $x_1(n)$ και $x_2(n)$ είναι ασυσχέτιστα, τότε από την εξίσωση (11.5) παίρνουμε:

$$E\{\Psi[x(n)]\} = E\{\Psi[x_1(n)]\} + E\{\Psi[x_2(n)]\} \quad (11.6)$$

όπου με $E\{\cdot\}$ συμβολίζεται ο τελεστής της μέσης τιμής. Η αυτοσυσχέτιση του $x(t)$ στο χρόνο 2τ ορίζεται ως:

$$R_x(t + \tau, t - \tau) = E\{x(t + \tau)x(t - \tau)\} \quad (11.7)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της $R_x(t + \tau, t - \tau)$ γράφεται

$$W(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x\left(t + \frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2}\right) \exp(-j\omega\tau) d\tau \quad (11.8)$$

και είναι γνωστός ως Κατανομή Wigner. Η ποσότητα $W(t, \omega)$ αποτελεί μέτρο του χρονικά εξελισσόμενου φάσματος και για στατικά σήματα την εκτίμηση του φάσματος του σήματος. Επειδή η $W(t, \omega)$ είναι άρτια συνάρτηση του ω ισχύει:

$$R_x\left(t + \frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2}\right) = \int_{-B}^B W(t, \omega) \cos(\omega\tau) d\omega \quad (11.9)$$

Από την εφαρμογή του μη γραμμικού ενεργειακού τελεστή έχουμε:

$$\begin{aligned} E\{\Psi[x(n)]\} &= E\{x^2(n)\} - E\{x(n+1)x(n-1)\} \\ &= R_x(n, n) - R_x(n+1, n-1) \\ &= \int_{-B}^B W(n, \omega)(1 - \cos 2\omega T_s) d\omega \end{aligned} \quad (11.10)$$

Ο όρος $(1 - \cos 2\omega T_s)$ της προηγούμενης σχέσης αποτελεί ουσιαστικά ένα υψηπερατό φίλτρο. Ας ορίσουμε ως $W'(n, \omega) = W(n, \omega)(1 - \cos 2\omega T_s)$ την υψηπερατή έκδοση του $W(n, \omega)$. Από την παραπάνω εξίσωση παίρνουμε

$$E\{\Psi[x(n)]\} = K_x(n) \int_{-B}^B W(n, \omega) d\omega = K_x(n) R_x(n, n) \quad (11.11)$$

όπου $K_x(n) = \int_{-B}^B W'(n, \omega) d\omega / \int_{-B}^B W(n, \omega) d\omega$.

Αφού η ποσότητα $K_x(n)$ αποτελεί το λόγο της ενέργειας στη ζώνη υψηλών συχνοτήτων ως προς τη συνολική ενέργεια του σήματος σε μια στιγμή nT_s , τότε αποτελεί μέτρο του περιεχομένου υψηλών συχνοτήτων του σήματος. Το πεδίο τιμών του $K_x(n)$ είναι το διάστημα $[0 \ 2]$. Μάλιστα ισχύει $K_x(n) = 0$ για τα dc σήματα, $K_x(n) = 1$ για το λευκό θόρυβο και $K_x(n) = 2$ για ημιτονικό σήμα με $B = \pi/2T_s$. Η ποσότητα $R_x(n, n)$ αποτελεί το στιγμιαίο ενεργειακό περιεχόμενο του σήματος τη στιγμή nT_s .

Από τη σχέση (11.6) λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (11.11) παίρνουμε

$$E\{\Psi[x(n)]\} = K_{x_1}(n) R_{x_1}(n, n) + K_{x_2}(n) R_{x_2}(n, n) \quad (11.12)$$

Η σημασία της προηγούμενης σχέσης είναι η ακόλουθη: Έστω τα $x_1(n)$ και $x_2(n)$ αναπαριστούν το σήμα υποβάθρου και το σήμα ενδιαφέροντος, αντίστοιχα. Όταν το σήμα ενδιαφέροντος δεν είναι παρόν, τότε ο δεύτερος όρος της εξίσωσης (11.12) είναι μηδενικός. Όταν το σήμα ενδιαφέροντος είναι παρόν, τότε ενδεχομένως να κυριαρχεί ο δεύτερος όρος. Αυτό συμβαίνει γιατί το σήμα ενδιαφέροντος σχετίζεται με ενδεχομένως μεγαλύτερη ενέργεια και περισσότερες υψηλές συχνότητες από το σήμα υποβάθρου.

Κεφάλαιο 12

Ανάλυση Πακέτων Κυματιδίων

Είναι ευρύτατα γνωστό ότι ο μετασχηματισμός Fourier αποτελεί εργαλείο για την ανάλυση περιοδικών συναρτήσεων και την αναπαράστασή τους ως την υπέρθεση καθαρών συχνοτήτων. Ωστόσο, η ανάλυση αυτή έχει νόημα όταν το σήμα είναι στατικό. Σε διαφορετική περίπτωση το σήμα πρέπει να εξετάζεται τοπικά, κάτι που σημαίνει την εφαρμογή ενός τοπικού μετασχηματισμού Fourier ή άλλων τοπικών μετασχηματισμών. Αυτό έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη διαφορετικών χρονο-συχνοτικών αναλύσεων, όπως ο μετασχηματισμός Fourier βραχέως χρόνου, ο μετασχηματισμός Wigner-Ville ή ο μετασχηματισμός Gabor. Τα τελευταία χρόνια έχει αναπτυχθεί η ανάλυση κυματιδίων. Τα κυματίδια αποτελούν ένα πολύ ισχυρό εναλλακτικό εργαλείο στους μετασχηματισμούς της χρονοσυχνοτικής ανάλυσης. Η ανάλυση κυματιδίων έχει προκαλέσει σημαντικό ενδιαφέρον τόσο σε θεωρητικό επίπεδο όσο και σε επίπεδο εφαρμογών. Στο πεδίο της βιο-μηχανικής η αναπαράσταση κυματιδίων έχει χρησιμοποιηθεί αρχικά στην ανάλυση ηλεκτροκαρδιογραφημάτων. Στην περίπτωση των ηλεκτροεγκεφαλογραφικών σημάτων και ειδικότερα για την εξαγωγή των προκλητών δυναμικών, έχουν πραγματοποιηθεί πολλές επιτυχείς προσπάθειες που χρησιμοποιούν το διακριτό μετασχηματισμό κυματιδίων [4]. Στη συνέχεια παρουσιάζονται σε συντομία μερικές από τις βασικές έννοιες του μετασχηματισμού κυματιδίων.

12.1 Εισαγωγή

Η ανάλυση κυματιδίων αποτελεί την ανάλυση ενός σήματος σε ένα ιεραρχημένο σύνολο προσεγγίσεων και λεπτομερειών. Ο μετασχηματισμός κυματιδίων αποτελεί ένα γραμμικό μετασχηματισμό του σήματος που χρησιμοποιεί ολισθήσεις και διαστολές κυματιδίων τα οποία περιλαμβάνονται σε ένα σύνολο που ονομάζεται βιβλιοθήκη κυματιδίων. Τα ολισθημένα και διασταλμένα κυματίδια συμβολίζονται με $\psi_{(a,b)} = a^{-1/2} \psi(\frac{t-b}{a})$, όπου η παράμετρος b αντιστοιχεί στην ολίσθηση και η παράμετρος a στη διαστολή της δεδομένης συνάρτησης ενός κυματιδίου $\psi(t)$. Ο μετασχηματισμός κυματιδίων ενός σήματος $f \in H$ παραμετροποιείται από τις παραμέτρους διαστολής και ολίσθησης a και b και γράφεται ως:

$$T_\psi f(a, b) = \langle f, \psi_{(a,b)} \rangle \quad (12.1)$$

όπου το $\langle \cdot, \cdot \rangle$ αποτελεί το εσωτερικό γινόμενο που σχετίζεται με το χώρο Hilbert H . Βασική απαίτηση είναι η αντιστρεψιμότητα του μετασχηματισμού και άρα η ανακατασκευή του σήματος από τους συντελεστές του μετασχηματισμού $T_\psi f(a, b)$. Οι διάφοροι τύποι του μετασχηματισμού που προκύπτουν εξαρτώνται από τον τρόπο με τον οποίο οι παράμετροι a και b διακριτοποιούνται. Έτσι, για παράδειγμα, έχουμε το συνεχή μετασχηματισμό κυματιδίων για τον οποίο οι παράμετροι αυτοί μεταβάλλονται κατά συνεχή τρόπο. Στην πράξη χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός κυματιδίων για διακριτές τιμές των a και b , π.χ. $a = 2^i$ και $b = k$, όπου $(i, k) \in \mathbb{Z}^2$. Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για το διακριτό μετασχηματισμό κυματιδίων. Ο μετασχηματισμός θα είναι αντιστρέψιμος

εάν και μόνο εάν το αντίστοιχο σύνολο των διασταλμένων και ολισθημένων κυματιδίων ορίζει ένα πλαίσιο κυματιδίων. Με άλλα λόγια, τα κυματίδια πρέπει να σχεδιαστούν έτσι ώστε

$$A \cdot \|f\|^2 \leq \sum_{a,b} | \langle f, \psi_{a,b} \rangle |^2 \leq B \cdot \|f\|^2 \quad (12.2)$$

όπου τα A και B είναι δύο θετικές σταθερές. Το πλαίσιο κυματιδίων είναι απλά μια παραλλαγή της βάσης κυματιδίων που λαμβάνεται όταν $a = 2^i$, $b = 2^i \cdot k$ με $(i, k) \in \mathbb{Z}^2$. Στην περίπτωση αυτή, τα ολισθημένα και διασταλμένα κυματίδια πρέπει να είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα, κάτι που επιβάλλει ακόμη ισχυρότερους περιορισμούς στην επιλογή του ψ . Εάν στην εξίσωση (12.2) είναι $A = B = 1$, τότε ο μετασχηματισμός είναι ορθογώνιος.

12.1.1 Κυματίδια και Χρονοσυχνοτική Ανάλυση

Το κυματίδιο ανάλυσης $\psi(t)$ είναι μια τυπική καλά εντοπισμένη ζωνοπερατή συνάρτηση με κεντρική συχνότητα ω_0 . Η απαίτηση είναι ότι το γινόμενο χρόνος - εύρος ζώνης είναι κοντά στο όριο που προσδιορίζεται από την αρχή αβεβαιότητας : $\Delta_\psi \cdot \Delta_{\dot{\psi}} \geq 1/2$. Συνεπώς, κάθε πρότυπο $\psi_{(a,b)}$ τείνει να εντοπίζεται σε μια συγκεκριμένη ελλειπτική περιοχή του επιπέδου χρόνου-συχνοτήτων στη θέση $t = b$ και $\omega = \omega_0/a$. Το εμβαδόν αυτών των εντοπισμένων περιοχών είναι το ίδιο για όλα τα πρότυπα $((a \cdot \Delta_\psi) \times (\Delta_{\dot{\psi}}/a))$ και περιορίζεται από την αρχή της αβεβαιότητας. Έτσι, μετρώντας τη συσχέτιση μεταξύ του σήματος και κάθε προτύπου κυματιδίου, λαμβάνουμε ένα χαρακτηριστικό του χρονο-συχνοτικού περιεχομένου. Η κύρια διαφορά με τον βραχέως χρόνου μετασχηματισμό Fourier είναι ότι το μέγεθος του παραθύρου ανάλυσης δεν είναι σταθερό επειδή μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με τη συχνότητα. Η ιδιότητα αυτή επιτρέπει στο μετασχηματισμό κυματιδίων να εστιάσει στις λεπτομέρειες αλλά με αντίστοιχη απώλεια στη φασματική ανάλυση. Πρέπει να σημειώσουμε ότι τα περισσότερα βιοσήματα περιλαμβάνουν ένα συνδυασμό κρουστικών γεγονότων και δραστηριότητας υποβάθρου που μπορεί να μεταφέρουν σημαντική ιατρική πληροφορία. Ο βραχέως χρόνου μετασχηματισμός Fourier ή οι άλλες συμβατικές χρονοσυχνοτικές μέθοδοι είναι καλά προσαρμοσμένες για τα τελευταίου τύπου γεγονότα αλλά είναι λιγότερο κατάλληλες για την ανάλυση των παλμών μικρής διάρκειας. Όταν και τα δύο είδη γεγονότων είναι παρόντα στα δεδομένα, ο μετασχηματισμός κυματιδίων αποτελεί την καλύτερη λύση για τον εντοπισμό των παλμών μικρής διάρκειας.

12.1.2 Βάσεις Κυματιδίων

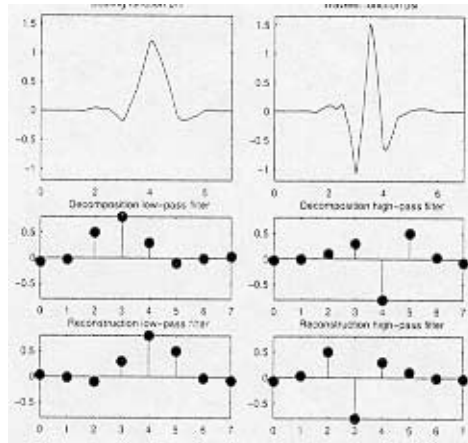
Οι βάσεις κυματιδίων παρέχουν μία μη πλεοναστική ανάλυση ενός σήματος ως προς τις ολισθήσεις και τις διαστολές του $\psi(t)$ (ιεραρχικός ή πυραμιδικός μετασχηματισμός). Έτσι, είναι δυνατή η αναπαράσταση ενός σήματος από τα κυματίδια :

$$f = \sum_i \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{i,k} \psi_{(i,k)} \quad (12.3)$$

Οι $c_{i,k} = \langle f, \psi_{(i,k)} \rangle$ είναι οι συντελεστές κυματιδίων, όπου το i αποτελεί το δείκτη κλίμακας i και το k το δείκτη θέσης. Υπάρχουν επίσης μη ιεραρχικές παραλλαγές (πακέτα κυματιδίων) που αποτελούν άμεση επέκταση των παραδοσιακών μπλοκ μετασχηματισμών (Fourier κλπ). Το σημαντικότερο είναι ότι στη διακριτή περίπτωση η σχέση (12.3) παρέχει μία ένα - προς - ένα αναπαράσταση του σήματος ως προς τους συντελεστές κυματιδίων του.

12.2 Κυματίδια

Στη βιβλιοθήκη κυματιδίων ανήκουν και τα κυματίδια που συμβολίζονται με $\psi = \psi(t)$ και οι συναρτήσεις κλίμακας που συμβολίζονται με $\phi = \phi(t)$. Το ζεύγος των συναρτήσεων αυτών

Σχήμα 12.1: symlet τάξεως $N = 4$

ικανοποιεί τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) \phi(2t - k) \quad (12.4)$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k) \phi(2t - k), \quad g(k) = (-1)^k h(1 - k) \quad (12.5)$$

Η $h = \{h(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι μια ακολουθία συντελεστών, η οποία ορίζει μια σχετιζόμενη ακολουθία συντελεστών $g = \{g(k) : k \in \mathbb{Z}\}$. Όλες οι ιδιότητες της βιβλιοθήκης κυματιδίων καθορίζονται από την h . Το ολοκλήρωμα της $\psi(t)$ είναι μηδενικό ($\int \psi(t) dt = 0$) και η $\psi(t)$ χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των λεπτομερειών του σήματος, ενώ το ολοκλήρωμα της $\phi(t)$ ισούται με τη μονάδα ($\int \phi(t) dt = 1$) και η $\phi(t)$ χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των προσεγγίσεων, όπως αναπτύσσεται παρακάτω.

Παράδειγμα κυματιδίων αποτελούν τα *symlets*. Τα *symlets* είναι σχεδόν συμμετρικά κυματίδια που προτάθηκαν από την Daubechies [22] ως τροποποιήσεις των Daubechies κυματιδίων. Το Σχήμα 12.1 απεικονίζει το *symlet* τάξεως $N = 4$.

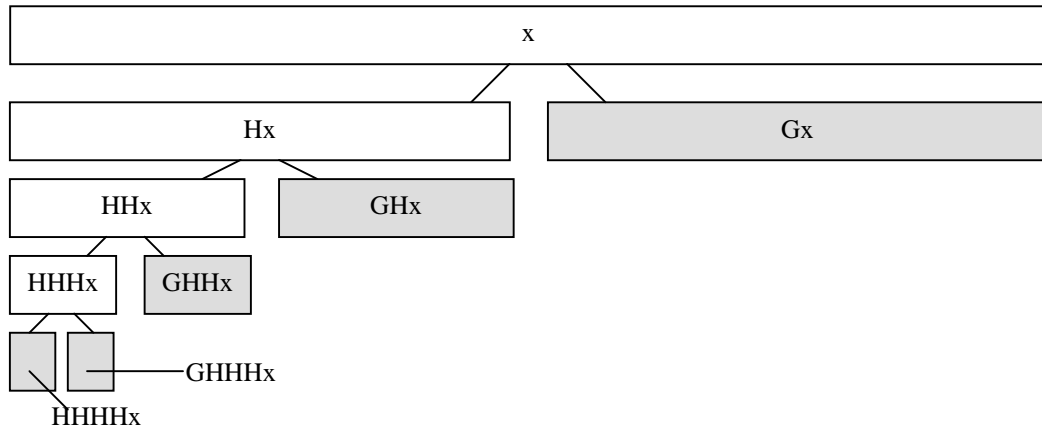
12.2.1 Ανάλυση κυματιδίων

Η ανάλυση ενός σήματος $u = u(t)$ ως προς τη βιβλιοθήκη κυματιδίων ξεκινά με την ακολουθία των εσωτερικών γινομένων του σήματος με τις ακέραιες μετατοπίσεις των συναρτήσεων κλίμακας:

$$x(k) = \int_R u(t) \phi(t - k) dt, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (12.6)$$

Αυτό ισοδυναμεί με την προβολή του αρχικού σήματος που είναι συνάρτηση μιας συνεχούς μεταβλητής $t \in \mathbb{R}$ στον περισσότερο περιορισμένο υπόχωρο των συναρτήσεων που προκύπτουν από ακέραιες μετατοπίσεις της ϕ . Εάν οι προβολές αυτές διατηρούν αξιόπιστα τις σημαντικές ιδιότητες του αρχικού σήματος, εξαρτάται από το h και από τις άλλες υποθέσεις για το $u(t)$. Από τις νέες ακολουθίες $x = \{x(k) : k \in \mathbb{Z}\}$, τα εσωτερικά γινόμενα του $u(t)$ με τις διαστολές και τις ολισθήσεις των κυματιδίων μπορούν να υπολογιστούν με το ακόλουθο ζεύγος φίλτρων:

$$Hx(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(2n - k)x(k), \quad Gx(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(2n - k)x(k), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (12.7)$$



Σχήμα 12.2: Διακριτός μετασχηματισμός κυματιδίων

Τα παραπάνω ισχύουν γιατί τα κυματίδια και οι συναρτήσεις κλίμακας συσχετίζονται μέσω των εξισώσεων (12.4) και (12.5). Για παράδειγμα,

$$\int_R u(t) 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k) dt = GH^{j-1}x(k) \quad (12.8)$$

για κάθε ακέραιο $j \geq 0$ και κάθε ακέραιο k . Όλα εκτός από το τελευταίο εσωτερικό γινόμενο λαμβάνονται από το x εφαρμόζοντας ένα συγκεκριμένο πλήθος H φίλτρων που ακολουθείται από ένα G φίλτρο. Η διαδικασία παρουσιάζεται στο Σχήμα 12.2, όπου ο μετασχηματισμός κυματιδίων αποτελείται από τα αποτελέσματα που αντιστοιχούν στα γραμμοσκιασμένα πλαίσια. Ο μετασχηματισμός αυτός καλείται διακριτός μετασχηματισμός κυματιδίων επειδή μπορεί να αναπαράγει μόνο τη διακριτή προσέγγιση x του αρχικού σήματος u .

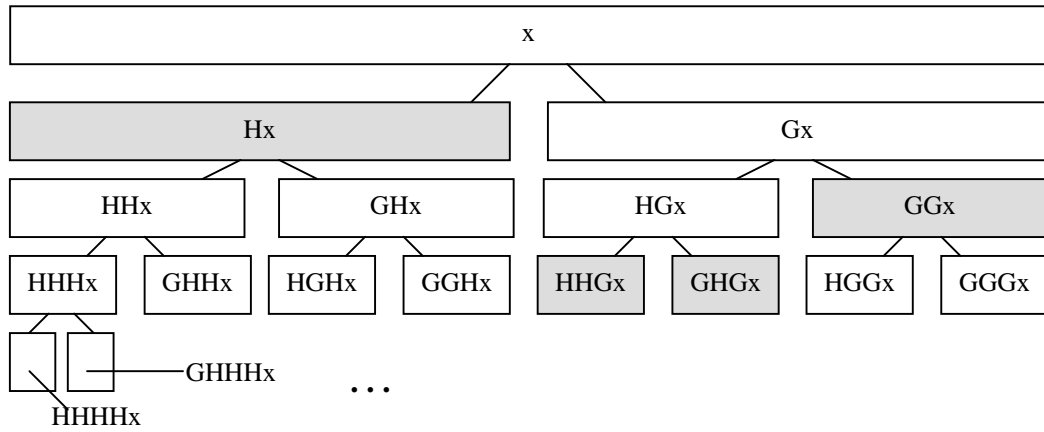
Σε αντίθεση με τις συμβατικές τεχνικές, η ανάλυση κυματιδίων παράγει μια ιεραρχικά οργανωμένη σειρά ανάλυσης. Η επιλογή του κατάλληλου επιπέδου για την ιεραρχία βασίζεται στο σήμα. Συχνά το επίπεδο επιλέγεται με βάση την επιθυμητή χαμηλή συχνότητα αποκοπής. Σε κάθε επίπεδο j , παράγεται η προσέγγιση j -οστού επιπέδου A_j του σήματος και οι λεπτομέρειες j -οστού επιπέδου D_j του σήματος. Το αρχικό σήμα θεωρείται ως η προσέγγιση στο επίπεδο 0 και συμβολίζεται με A_0 . Οι όροι προσέγγιση και λεπτομέρειες δικαιολογούνται από το γεγονός ότι για παράδειγμα το A_1 αποτελεί την προσέγγιση του A_0 λαμβάνοντας υπόψη τις χαμηλές συχνότητες του A_0 , ενώ οι λεπτομέρειες D_1 αντιστοιχούν στη διόρθωση υψηλών συχνοτήτων. Συνεχίζοντας με τον τρόπο αυτό καταλήγουμε στην ανάλυση:

$$A_0 = A_1 + D_1 = A_2 + D_2 + D_1 = A_3 + D_3 + D_2 + D_1 = \dots \quad (12.9)$$

12.3 Πακέτα Κυματιδίων

Η βιβλιοθήκη πακέτων κυματιδίων κατασκευάζεται από αναδομές του αλγορίθμου κυματιδίων χρησιμοποιώντας περισσότερα G φίλτρα. Η βιβλιοθήκη αυτή περιέχει τη βάση των κυματιδίων, συναρτήσεις Walsh και λείες παραλλαγές των συναρτήσεων Walsh που καλούνται πακέτα κυματιδίων. Οι βασικές συναρτήσεις συμβολίζονται με $w_n = w_n(t)$, όπου ο $n \geq 0$ αποτελεί τον ονομαστικό δείκτη συχνότητας. Οι συναρτήσεις αυτές ικανοποιούν τις ακόλουθες εξισώσεις που αποτελούν γενίκευση των εξισώσεων (12.4) και (12.5):

$$w_{2n}(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) w_n(2t - k) \quad (12.10)$$



Σχήμα 12.3: Ανάλυση με χρήση πακέτων κυματιδίων

$$w_{2n+1}(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k) w_n(2t - k), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12.11)$$

Η αρχική συνάρτηση w_0 είναι απλά η συνάρτηση κλίμακας ϕ . Παρόμοια είναι $w_1 = \psi$. Εύκολα μπορεί να δει κανείς πώς τα w_n αναπτύσσονται για όλες τις μη αρνητικές τιμές του n . Επίσης, όπως και στην περίπτωση των κυματιδίων, οι ιδιότητες όλων των συναρτήσεων $\{w_n, n \geq 0\}$ καθορίζονται από την ακολουθία h .

12.3.1 Ανάλυση πακέτων κυματιδίων

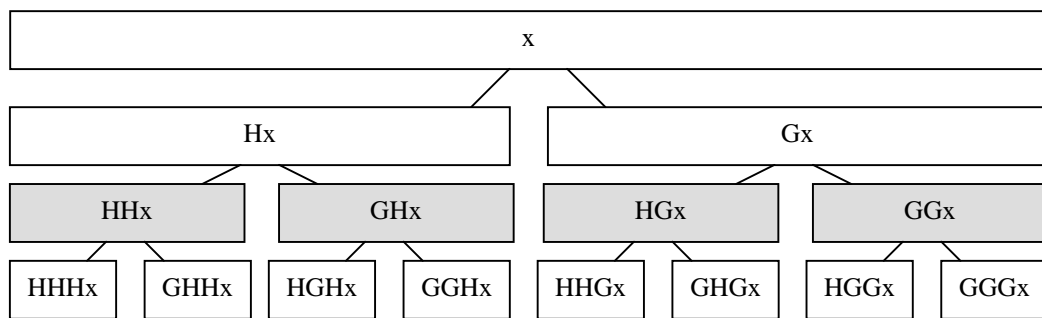
Η ανάλυση πακέτων κυματιδίων αποτελούν γενίκευση της ιδέας του μετασχηματισμού κυματιδίων που επιτυγχάνει χρονοσυχνοτική ανάλυση του σήματος. Αυτό βέβαια γίνεται εντός των ορίων που επιβάλλει η αρχή αβεβαιότητας του Heisenberg. Η ιδέα έγγειται στην επίτευξη μιας προσαρμοστικής διαμέρισης του επιπέδου χρόνου-συχνοτήτων με βάση το σήμα ενδιαφέροντος.

Η ανάλυση ενός σήματος $u = u(t)$ ως προς τη βιβλιοθήκη πακέτων κυματιδίων ξεκινά, όπως και στην περίπτωση των κυματιδίων, με την ακολουθία x των εσωτερικών γινομένων με τις συναρτήσεις κλίμακας που ορίζονται από την εξίσωση (12.6). Στη συνέχεια, η αναδρομική εφαρμογή των H και G τελεστών που ορίζονται από την εξίσωση (12.7) παράγουν τα εσωτερικά γινόμενα με τα άλλα πακέτα κυματιδίων. Για παράδειγμα,

$$\int_R x(t) 2^{-3/2} w_5(2^{-3}t - k) dt = GHGx(k) \quad (12.12)$$

για $k \in \mathbb{Z}$. Στην περίπτωση αυτή, η ονομαστική συχνότητα είναι 5 και ο δείκτης κλίμακας 3. Η διαδικασία για όλα τα πακέτα κυματιδίων συνολικά παρουσιάζεται στο Σχήμα 12.3. Τα εσωτερικά γινόμενα της προηγούμενης εξίσωσης υπολογίζονται στο γραμμοσκιασμένο πλαίσιο $GHGx$, που είναι το τρίτο από δεξιά στο επίπεδο 3 από την κορυφή. Χρησιμοποιώντας το σχήμα αυτό αναδρομικά σε κάθε νέο δημιουργούμενο κόμβο, κατασκευάζεται ένα δέντρο βάθους $\log L$, όπου με L συμβολίζεται το μήκος του υπό ανάλυση σήματος. Η ιδέα των πακέτων κυματιδίων επιτρέπει την εκτέλεση οποιασδήποτε ορθογώνιας ανάλυσης στο δέντρο αυτό.

Τα αποτελέσματα των γραμμοσκιασμένων πλαισίων του Σχήματος 12.3 αποτελούν ένα συγκεκριμένο υποσύνολο βάσης, δηλαδή ένα ελάχιστο σύνολο από το οποίο η ακολουθία x μπορεί να ανακτηθεί ακριβώς. Υπάρχουν και άλλα υποσύνολα βάσεων διαθέσιμα, όπως για παράδειγμα αυτό που απεικονίζεται στο Σχήμα 12.4. Αυτό είναι γνωστό ως πλήρη ανάλυση υποζώνης του αρχικού σήματος. Η αποκοπή οποιουδήποτε υποδέντρου εξακολουθεί να παρέχει μια ορθοκανονική βάση ως προς την οποία μπορεί να αναλυθεί το σήμα. Το δέντρο περιέχει αρκετές βάσεις, μία από τις



Σχήμα 12.4: Πλήρης βάση των πακέτων κυματιδίων

οποίες είναι και η ίδια η βάση κυματιδίων. Καθώς λοιπόν υπάρχει μια μεγάλη αλλά πεπερασμένη βιβλιοθήκη βάσεων, μπορούμε να πραγματοποιήσουμε μια διάταξη της ως προς κάποιο κριτήριο. Έτσι, είναι δυνατή η εξαγωγή της καλύτερης βάσης ως προς το κριτήριο αυτό [21]. Η βάση μπορεί να είναι οποιοδήποτε υποδέντρο του αρχικού πλήρους δέντρου και η μέθοδος καλύτερης βάσης παρέχει το υποδέντρο με χρήση σχήματος αποκοπής υποδέντρου που εκτελείται στο πλήρες δέντρο.

Κεφάλαιο 13

Μελέτη δραστηριότητας 40Hz

13.1 Δραστηριότητα 40Hz

Δραστηριότητα στις υψηλές συχνότητες, η οποία καλείται επίσης και δραστηριότητα 40Hz ή αλλιώς απόκριση γάμμα ζώνης (GBR-gamma band response) έχει παρατηρηθεί σε πολλές καταγραφές ERP που προκαλούνται τόσο από ακουστικά, όσο και από σωματοαισθητικά και από οπτικά ερεθίσματα. Οι γνωσιακές διαδικασίες επίσης δημιουργούν δραστηριότητα στη γάμμα ζώνη, συμπεριλαμβανομένης και της επιλεκτικής ακουστικής προσοχής και της οπτικοχωρικής προσοχής, της συγχρονισμένης αναπαράστασης αντικειμένων, της οπτικής αναζήτησης, της μνήμης βραχέως χρόνου και της αντίληψης μορφών. Σε νευροφυσιολογικό επίπεδο, η δραστηριότητα των 40Hz έχει παρατηρηθεί σε καταγραφές τόσο σε αναισθητοποιημένη γάτα όσο και στον οπτικό φλοιό πιθήκου. Έχει υποστηριχθεί [113] ότι η δραστηριότητα των νευρώνων του οπτικού φλοιού αντανακλά τη σύνδεση πληροφοριών που σχετίζονται με διαφορετικές ιδιότητες του οπτικού ερεθίσματος. Έχει επίσης υποστηριχθεί [78] ότι οι υψηλές συχνότητες στο ΗΕΓ αντανακλούν την ενεργοποίηση θαλαμοφλοιϊκών κυκλωμάτων κατά τη διάρκεια επεξεργασίας αισθητικών ερεθισμάτων σε ενσυνείδητη κατάσταση. Άλλοι επίσης ερευνητές [123] έχουν υποστηρίξει ότι η καταγραφόμενη οπτική δραστηριότητα των 40Hz μπορεί να αναπαριστά τη δημιουργία μιας συγχρονισμένης αναπαράστασης ενός αντικειμένου. Συνεπώς η δραστηριότητα στους 40Hz μπορεί να εμφανιστεί σε διαφορετικές περιοχές κατά τη διάρκεια διαφορετικών γνωσιακών λειτουργιών και μπορεί να παρέχει συγκεκριμένες πληροφορίες για αυτές τις λειτουργίες που δεν προκύπτουν από την παραδοσιακή ανάλυση των προκλητών δυναμικών. Σε μια πρόσφατη έρευνα [114] της δραστηριότητας που προηγείται των ανθρώπινων σακκαδικών κινήσεων, παρατηρήθηκαν διαφορές στις ζώνες του άλφα και βήττα ρυθμού μεταξύ των εκπεφρασμένων και των κανονικών σακκαδικών κινήσεων. Και οι δύο τύποι σακκαδικών κινήσεων παρουσίασαν παρόμοια δραστηριότητα γάμμα ρυθμού στα προκλητά δυναμικά με αναφορά ως προς την κίνηση. Η αντίστοιχη δραστηριότητα του γάμμα ρυθμού ως προς το οπτικό ερέθισμα δεν μελετήθηκε στην ερευνητική αυτή προσπάθεια.

Όταν ένα οπτικό ερέθισμα χρησιμοποιείται ως οδηγία για μια κινητική απάντηση, τότε λαμβάνει χώρα μια σειρά διαδικασιών επεξεργασίας από τις οπτικές περιοχές μέχρι τις βρεγματικές. Η σχέση ενός οπτικού ερεθίσματος με μια επιθυμητή απάντηση συσχετίζεται με την ενεργοποίηση νευρώνων στο βρεγματικό φλοιό [5], [86]. Επιπλέον, πρόσφατες ερευνητικές προσπάθειες έχουν δείξει ότι η περιοχή αυτή σχετίζεται με σύνθετες λειτουργίες, όπως η κωδικοποίηση της πρόθεσης κίνησης και η απόφαση μετά από επεξεργασία. Στην [31] είχαν γίνει καταγραφές ERP στις εμπρόσθιες και βρεγματικές περιοχές κατά τη διάρκεια τριών παραλλαγών ενός οπτικοκινητικού πειράματος κατά το οποίο οι συμμετέχοντες έπρεπε να αποφασίσουν, με βάση το σχήμα του στόχου, να εκτελέσουν είτε μια σακκαδική κίνηση προς ένα οπτικό στόχο είτε μια σακκαδική κίνηση στην αντίθετη κατεύθυνση από το στόχο είτε να μην εκτελέσουν καμία κίνηση. Τα ERP παρουσίασαν

διαφορές ανάμεσα στα τρία είδη απαντήσεων στα τελευταία στάδια της επεξεργασίας κοντά στην έναρξη της κίνησης. Στη συνέχεια, αναλύουμε τη δραστηριότητα στις υψηλές συχνότητες (25 – 40Hz) που παρουσιάζεται σε κάθε είδος απάντησης αναζητώντας τον πιθανό ρόλο των υψηλών συχνοτήτων στις διαδικασίες διάκρισης του στόχου, επιλογής της απάντησης και σχεδιασμού της κίνησης που λαμβάνουν χώρα κατά τη διάρκεια διαμόρφωσης της κάθε απάντησης [115].

13.2 Υλικό και μέθοδοι

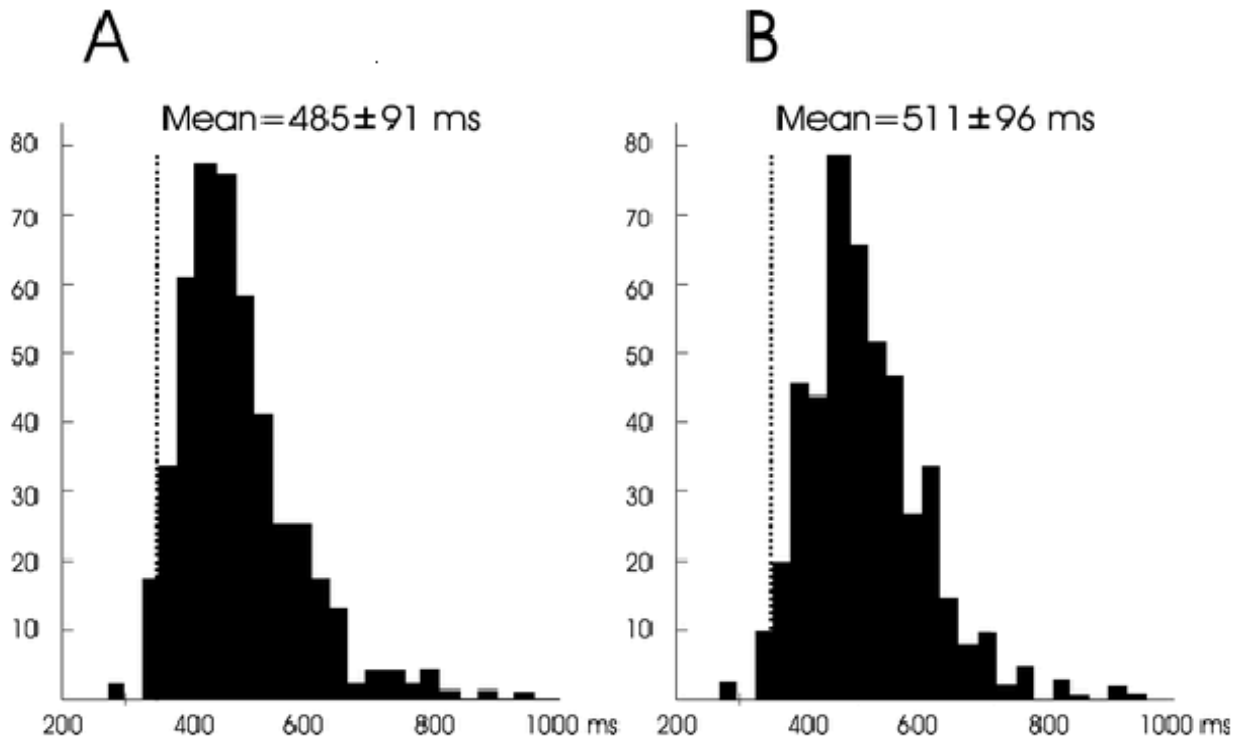
Χρησιμοποιήθηκαν οι καταγραφές της μελέτης [31]. Το πρωτόκολλο που ακολουθήθηκε είχε γίνει αποδεκτό από την επιστημονική επιτροπή του Αιγινήτειου Νοσοκομείου. Κάθε προσπάθεια ξεκινούσε με την εμφάνιση ενός κεντρικού σταθερού στόχου (μπλε κύκλος, 0.5^0 οπτική γωνία) στην οθόνη ενός υπολογιστή. Ο κεντρικός στόχος έσβηνε μετά από 6 – 8sec και μετά από μια μεταβαλλόμενη περίοδο 100 – 400msec, εμφανιζόταν ένας περιφερειακός στόχος σε γωνία 10^0 στα αριστερά ή στα δεξιά του κεντρικού στόχου. Εάν ο περιφερειακός στόχος ήταν κύκλος, η οδηγία ήταν να εκτελεστεί σακκαδική κίνηση προς το στόχο (προσακκαδική κίνηση). Εάν ο στόχος ήταν ένα τετράγωνο, η οδηγία ήταν να εκτελεστεί σακκαδική κίνηση προς την αντίθετη κατεύθυνση του στόχου (αντισακκαδική κίνηση). Τέλος, εάν ο στόχος ήταν ένα τρίγωνο, η οδηγία ήταν να μην εκτελεστεί καμία κίνηση αλλά να υπάρξει παραμονή στη θέση του κεντρικού στόχου (καμία κίνηση). Οι περιφερειακοί στόχοι είχαν το ίδιο μέγεθος (0.5^0 οπτική γωνία) και το ίδιο χρώμα (κίτρινο). Χρησιμοποιήθηκαν τα δεδομένα από 6 ανθρώπους οι οποίοι συμμετείχαν στο πείραμα. Ο συνολικός αριθμός προσπαθειών για κάθε ηλεκτρόδιο ήταν 1439. Αναλυτικά, οι προσπάθειες αυτές περιλαμβάνουν 446 προσακκαδικές, 462 αντισακκαδικές και οι υπόλοιπες 531 αντιστοιχούν σε προσπάθειες καμίας κίνησης.

Η καταγραφή του ΗΕΓ πραγματοποιήθηκε από 25 ηλεκτρόδια χρησιμοποιώντας το τροποποιημένο 10 – 20 σύστημα: $F_3, F_1, F_z, F_2, F_4, FC_3, FC_1, FC_z, FC_2, FC_4, C_3, C_1, C_z, C_2, C_4, CP_3, CP_1, CP_z, CP_2, CP_4, P_3, P_1, P_z, P_2, P_4$. Το σήμα διήλθε από ζωνοπερατό φίλτρο (0.01 – 75Hz) και στη συνέχεια ψηφιοποιήθηκε με συχνότητα δειγματοληψίας 200Hz. Καταγράφησαν επίσης οι οριζόντιες και κατακόρυφες κινήσεις του δεξιού ματιού (EOG, DC καταγραφή) και ψηφιοποιήθηκαν με συχνότητα 200Hz. Όλες οι προσπάθειες με παράσιτα ή κινήσεις ματιών που δεν πραγματοποιήθηκαν σύμφωνα με τις δοθείσες οδηγίες απορρίφθηκαν από την περαιτέρω διαδικασία ανάλυσης.

Οι ΗΕΓ καταγραφές που αναλύθηκαν για τις προσακκαδικές και αντισακκαδικές κινήσεις αποτελούνταν από το τμήμα εκείνο που αντιστοιχεί μεταξύ της εμφάνισης του περιφερειακού στόχου και της έναρξης της κίνησης του ματιού. Οι ΗΕΓ καταγραφές που αναλύθηκαν για τις περιπτώσεις της μη κίνησης αποτελούνταν από τα πρώτα 350msec αμέσως μετά την εμφάνιση του αντίστοιχου περιφερειακού στόχου. Αναλύθηκαν δύο είδη εποχών:

1. Οι ευθυγραμμισμένες ως προς το ερέθισμα εποχές, οι οποίες περιλαμβάνουν τα πρώτα 350msec αμέσως μετά την εμφάνιση του περιφερειακού στόχου
2. Οι ευθυγραμμισμένες ως προς την κίνηση εποχές, οι οποίες περιλαμβάνουν τα 350msec πριν από την έναρξη της κίνησης.

Η επιλογή του χρονικού διαστήματος των 350msec έγινε γιατί περίπου το 99% των προσπαθειών τόσο των προσακκαδικών όσο και των αντισακκαδικών κινήσεων παρουσίασαν χρόνο απόκρισης ίσο ή μεγαλύτερο από αυτό το χρονικό διάστημα, όπως άλλωστε προκύπτει και από το σχήμα 13.1. Σε κάθε προσπάθεια, η μέση τιμή που αντιστοιχεί σε 50msec πριν από την εμφάνιση του περιφερειακού στόχου χρησιμοποιήθηκε ως βασική γραμμή και αφαιρέθηκε από όλες τις καταγραφόμενες τιμές του ΗΕΓ. Στη συνέχεια υπολογίστηκε η μέση κυματομορφή των δεδομένων από όλες τις προσπάθειες και προσδιορίστηκαν για κάθε συμμετέχοντα, για κάθε είδος κίνησης



Σχήμα 13.1: Κατανομή χρόνων απόκρισης : Α) Προσακκαδική κίνηση Β) Αντισακκαδική κίνηση. Η κατακόρυφη γραμμή αναπαριστά το χρονικό διάστημα των 350msec μετά την εμφάνιση του περιφερειακού στόχου στο οποίο πραγματοποιήθηκε η ανάλυση των καταγραφών.

και για κάθε ηλεκτρόδιο, τόσο τα προκλητά δυναμικά που είναι ευθυγραμμισμένα ως προς το ερέθισμα όσο και τα προκλητά δυναμικά που είναι ευθυγραμμισμένα ως προς την κίνηση. Περαιτέρω, βρίσκοντας το μέσο όρων όλων όσων συμμετείχαν προσδιορίστηκαν για κάθε είδος κίνησης και για κάθε ηλεκτρόδιο τα 'συνολικά' προκλητικά δυναμικά και ως προς το ερέθισμα και ως προς την κίνηση.

Η δραστηριότητα στις διάφορες συχνοτικές ζώνες υπολογίστηκε με τη χρήση της μεθόδου ανάλυσης κυματιδίων των προκλητών δυναμικών (και ως προς το ερέθισμα και ως προς την κίνηση) για κάθε συμμετέχοντα και για κάθε είδος κίνησης καθώς και των 'συνολικών' προκλητών δυναμικών (και ως προς το ερέθισμα και ως προς την κίνηση) για κάθε είδος κίνησης. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε η Ανάλυση Πακέτων Κυματιδίων [4], η οποία αποτελεί γενίκευση της ανάλυσης κυματιδίων που αναλύει εκ νέου τις προκύπτουσες λεπτομέρειες του σήματος σε διάφορες ζώνες συχνοτήτων:

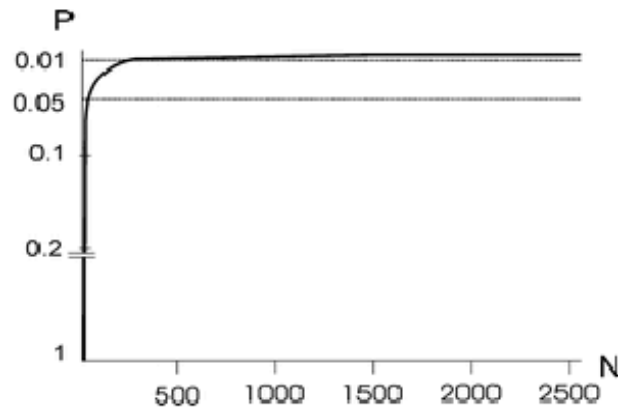
$$WPA(j, n, k) = \sum_t x(t)w_{j,n,k}(t) \quad (13.1)$$

όπου $x(t)$ είναι η ERP καταγραφή, το $w_{j,n,k}(t)$ συμβολίζει τις συναρτήσεις ανάλυσης, j είναι παράμετρος κλίμακας, n είναι παράμετρος συχνοτήτων ($n = 0, 1, \dots, 15$) και k είναι παράμετρος εντοπισμού χρόνου.

Οι συναρτήσεις ανάλυσης ορίζονται ως

$$w_{j,n,k}(t) = 2^{j/2}w_n(2^{-j}t - k) \quad (13.2)$$

όπου το σύνολο $w_{j,n} = (w_{j,n,k}(t), k \in \mathcal{Z})$ είναι το (j, n) πακέτο κυματιδίων. Η συνάρτηση $w_n(t)$ ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις (12.10) και (12.11). Οι υπολογισμοί έγιναν με το MATLAB χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση κυματιδίων *sym2* [85].



Σχήμα 13.2: Αποτελέσματα μεταθέσεων. Το σχήμα παρουσιάζει την πιθανότητα η απόλυτη διαφορά της δραστηριότητας στους 40Hz μεταξύ των προσπαθειών προσακκαδικών κινήσεων και καμίας κίνησης μετά από N μεταθέσεις, να είναι μεγαλύτερη από την πραγματική διαφορά για τη συνολική δραστηριότητα στους 40Hz για το ηλεκτρόδιο CP_4 . Από το σχήμα προκύπτει ότι μετά από 500 μεταθέσεις, η πιθανότητα αυτή γίνεται μικρότερη από 0.01 και μετά τις 1000 μεταθέσεις σταθεροποιείται.

Ακολουθώντας, υπολογίστηκαν οι λεπτομέρειες της ανάλυσης κυματιδίων για τις ακόλουθες ζώνες ενδιαφέροντος : α) $25 - 31.25Hz$ β) $31.25Hz - 37.5Hz$ γ) $37.5 - 43.75Hz$ και δ) $43.75 - 50Hz$. Στη συνέχεια εφαρμόστηκε στις χρονοσειρές αυτές ο μη γραμμικός ενεργειακός τελεστής (εξίσωση (11.2)) για σήματα διακριτού χρόνου και προέκυψε το σήμα στιγμιαίας ενέργειας που μετρά τη δραστηριότητα στην αντίστοιχη ζώνη.

Ο έλεγχος της σημαντικότητας των διαφορών στη δραστηριότητα των 40Hz (που αντιστοιχεί στη δραστηριότητα της ζώνης $37.5 - 43.75Hz$) που παρατηρήθηκαν ανάμεσα στα είδη των κινήσεων για τα προκλητά δυναμικά ως προς το ερέθισμα, έγινε χρησιμοποιώντας τη διαδικασία των τυχαίων μεταθέσεων, η οποία δεν βασίζεται σε συγκεκριμένες υποθέσεις για την κατανομή των δεδομένων [33]. Συγκεκριμένα, αντιστοιχίσαμε τα δεδομένα κάθε προσπάθειας του αρχικού συνόλου δεδομένων σε ένα νέο είδος κίνησης κατά τυχαίο τρόπο. Έτσι, προέκυψε ένα νέο σύνολο δεδομένων από αναμεμειγμένες προσπάθειες. Η διαδικασία ανάμειξης εκτελέστηκε σε ολόκληρο το σύνολο δεδομένων όλων των προσπαθειών για όλους τους συμμετέχοντες, για κάθε ηλεκτρόδιο ξεχωριστά. Τα αναμεμειγμένα δεδομένα χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό εκ νέου των μέσων ERP κυματομορφών και στη συνέχεια των αποκρίσεων των 40Hz για κάθε είδος κίνησης και για κάθε ηλεκτρόδιο. Έτσι, υπολογίστηκε ένα σύνολο από τιμές ERP και αποκρίσεις 40Hz για καθένα από 15 χρονικά παράθυρα των 'συνολικών' κυματομορφών (15 χρονικά παράθυρα διάρκειας 25msec κεντραρισμένα στα 0, 25, 50, ..., 350msec μετά την εμφάνιση του περιφερειακού στόχου). Στη συνέχεια υπολογίστηκαν οι διαφορές μεταξύ των προσακκαδικών και αντισακκαδικών κινήσεων, προσακκαδικών κινήσεων και καμίας κίνησης και αντισακκαδικών κινήσεων και καμίας κίνησης, για κάθε χρονικό παράθυρο και ηλεκτρόδιο. Η διαδικασία μεταθέσεων εκτελέστηκε 2500 φορές παράγοντας 2500 διαφορές για τα προκλητά δυναμικά ως προς το ερέθισμα και 2500 διαφορές για τη δραστηριότητα των 40Hz ως προς το ερέθισμα. Αυτές οι διαφορές χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό του ποσοστού των φορών (εκπεφρασμένο σε πιθανότητα από 0 έως 1) που οι διαφορές των αναμεμειγμένων ERP ή της δραστηριότητας των 40Hz μεταξύ δύο διαφορετικών ειδών κινήσεων ήταν μεγαλύτερες από την αρχική διαφορά για κάθε χρονικό παράθυρο και ηλεκτρόδιο (οι διαφορές κατά απόλυτη τιμή). Εάν μπορούσαν να εκτελεστούν όλες οι δυνατές μεταθέσεις μεταξύ των κινήσεων, το ποσοστό αυτό θα αντιπροσώπευε την πραγματική πιθανότητα η αρχική (πραγματική) διαφορά ενεργειών να προέκυπτε από τυχαία αντιστοίχιση κάθε προσπάθειας σε ένα συγκεκριμένο είδος κίνησης. Το Σχήμα 13.2 παρουσιάζει την πιθανότητα η απόλυτη διαφορά της

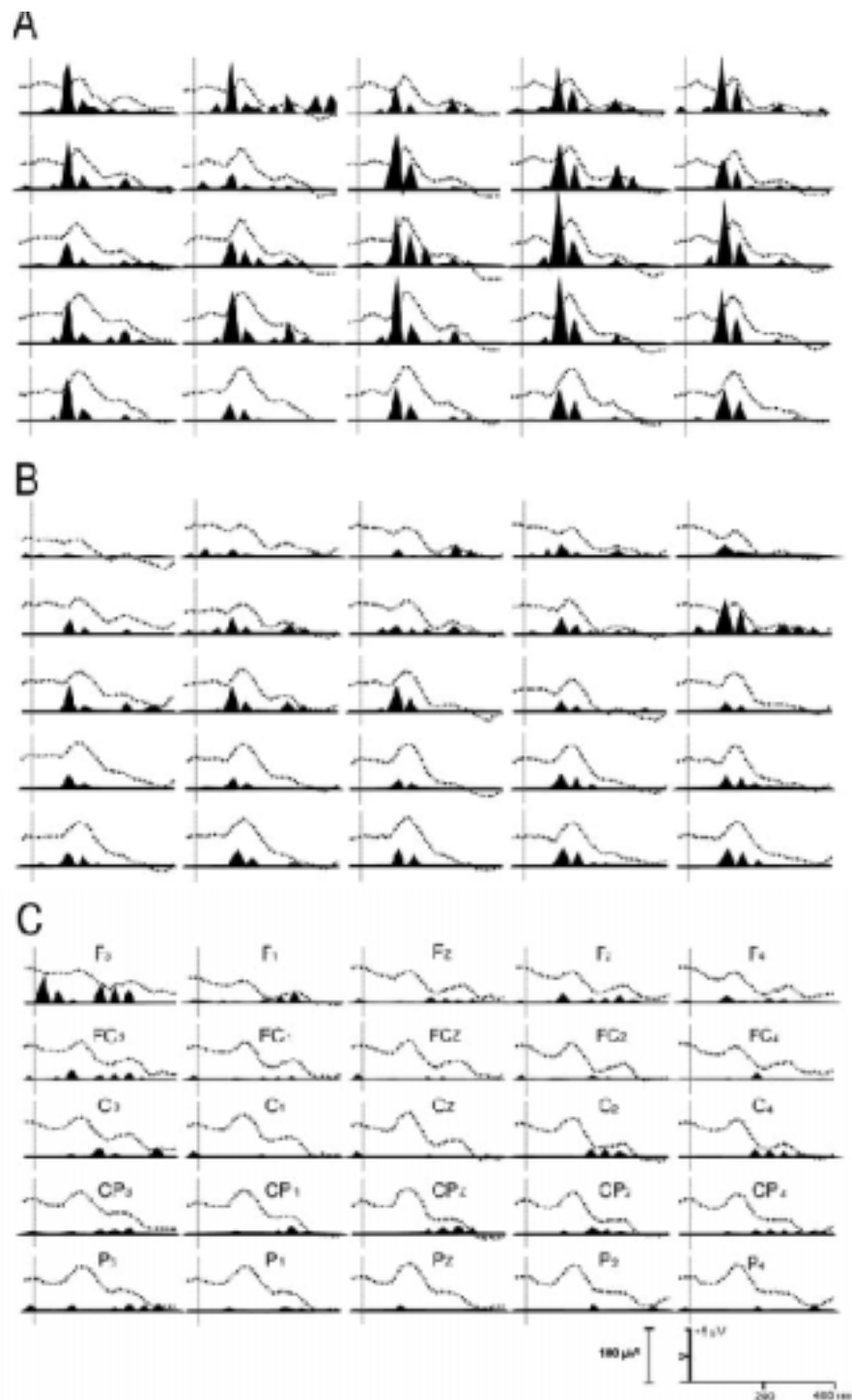
δραστηριότητας στους 40Hz μεταξύ των προσπαθειών προσακκαδικών κινήσεων και καμίας κίνησης μετά από N μεταθέσεις, να είναι μεγαλύτερη από την πραγματική διαφορά για τη συνολική δραστηριότητα στους 40Hz για το ηλεκτρόδιο CP_4 . Από το σχήμα προκύπτει ότι μετά από περίπου 500 μεταθέσεις, η πιθανότητα αυτή είναι μικρότερη από 0.01 (το 0.01 αποτελεί το επίπεδο σημαντικότητας) και μετά τις 1000 μεταθέσεις πρακτικά δεν μεταβάλλεται. Σημειώνεται ότι για να εξαντληθεί το σύνολο όλων των δυνατών μεταθέσεων απαιτούνται 10^{681} μεταθέσεις.

Επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων του ελέγχου με τη μέθοδο των μεταθέσεων έγινε και με τη χρησιμοποίηση της Kruskal-Wallis μη παραμετρικής ANOVA μεθόδου. Με τη μέθοδο αυτή ελέγχεται εάν οι τιμές των πλατών των ERP ή της δραστηριότητας των 40Hz σε κάθε ένα από 6 χρονικά παράθυρα είναι σημαντικά διαφορετικές μεταξύ των τριών ειδών κινήσεων. Χρησιμοποιήσαμε τις τιμές του πλάτους ή της ενέργειας σε καθένα από τα χρονικά παράθυρα των 50, 75, 100, 125, 150 και 175msec για κάθε συμμετέχοντα και κάθε είδος κίνησης για ένα σύνολο 6 ηλεκτροδίων (C_4 , C_6 , CP_3 , CP_z , CP_4 , CP_6) για τα οποία οι έλεγχοι μεταθέσεων έδειξαν σημαντικές διαφορές ανάμεσα στα είδη κινήσεων. Η ενέργεια ή το πλάτος των ERP σε κάθε χρονικό παράθυρο υπολογίστηκε όπως και στην περίπτωση της ανάλυσης μεταθέσεων λαμβάνοντας το μέσο όρο πέντε τιμών κεντραρισμένων στο συγκεκριμένο χρονικό παράθυρο (για παράδειγμα 100msec σημαίνει 90 – 110msec). Έτσι, προκύπτει ένα σύνολο δεδομένων αποτελούμενο από 36 τιμές πλάτους ή ενέργειας για κάθε χρονικό παράθυρο και κάθε είδος κίνησης (έξι συμμετέχοντες \times έξι ηλεκτρόδια). Η ANOVA για κάθε χρονικό παράθυρο εκτελέστηκε χρησιμοποιώντας συνολικά 108(36×3) τιμές ενέργειας ή πλάτους ERP για τα τρία είδη κινήσεων και έχοντας το είδος της κίνησης ως την ανεξάρτητη μεταβλητή.

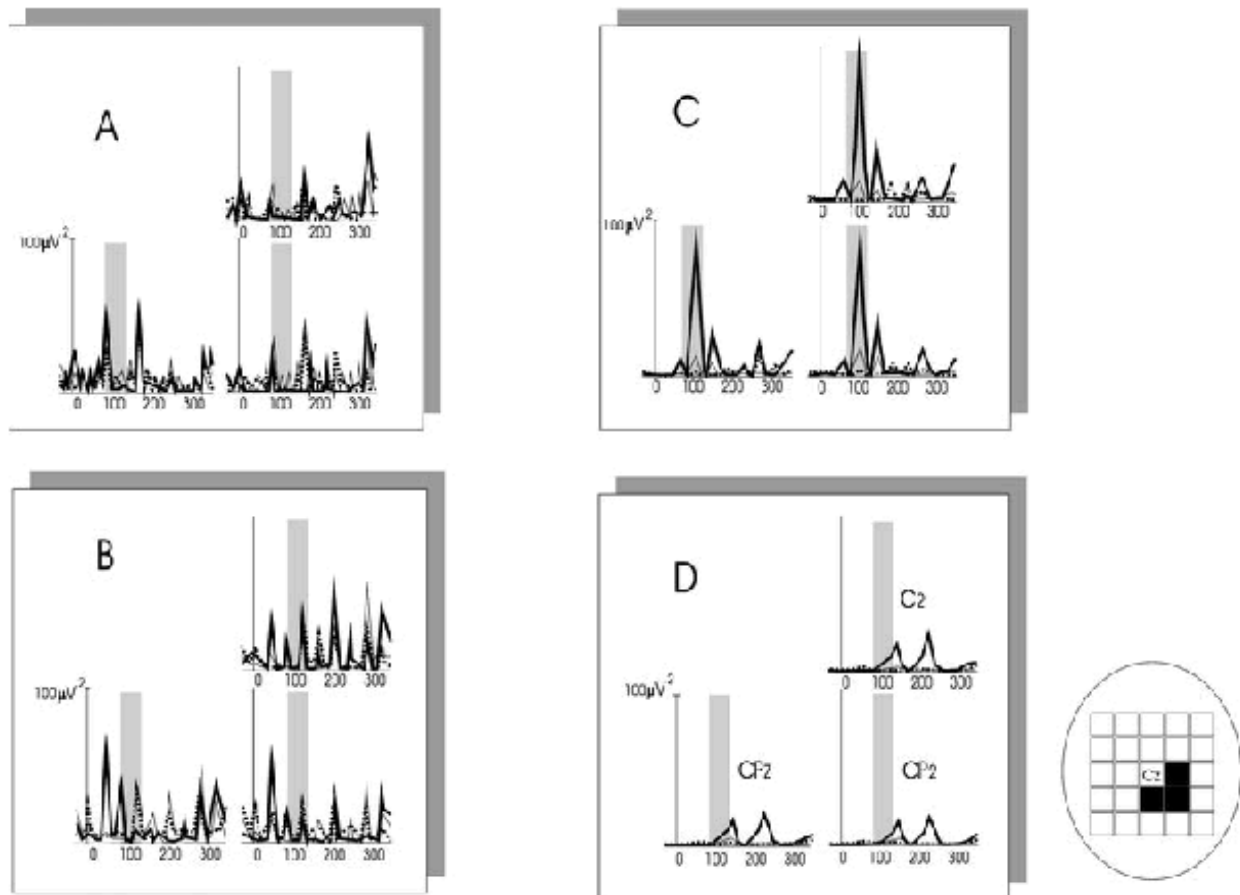
13.3 Δραστηριότητα 40Hz ως προς το ερέθισμα

Το Σχήμα 13.3 δείχνει τη συνολική μέση δραστηριότητα των 40Hz ως προς το ερέθισμα για καθένα από τα τρία είδη κινήσεων σε καθένα από τα 25 ηλεκτρόδια (συνεχόμενες κυματομορφές). Η δραστηριότητα αυτή παρουσιάζει μια ξεκάθαρη διαφοροποίηση μεταξύ της προσακκαδικής κίνησης (Σχήμα 13.3A) και των άλλων δύο κινήσεων (Σχήμα 13.3B,C). Είναι ξεκάθαρη και εμφανής μια μεταβατική κορυφή στα 100msec μετά την εμφάνιση του ερεθίσματος για την προσακκαδική κίνηση (Σχήμα 13.3A). Η αντίστοιχη κορυφή για την αντισακκαδική κίνηση είναι πολύ κοντύτερα στο επίπεδο θορύβου της βασικής γραμμής (Σχήμα 13.3B), ενώ είναι αμελητέα για την περίπτωση της καμίας κίνησης (Σχήμα 13.3C). Η εντυπωσιακή διαφορά μεταξύ των τριών ειδών κίνησης που παρατηρήθηκε στη ζώνη των 40Hz (37.5 – 43.75Hz), με κορύφωση στα 100msec μετά την εμφάνιση του περιφερειακού στόχου, δεν παρατηρήθηκε στις υπόλοιπες συχνοτικές ζώνες που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση της συνολικής μέσης ERP κυματομορφής ως προς το ερέθισμα (Σχήμα 13.4). Έτσι, η επεξεργασία εστιάστηκε στην ανάλυση των αποτελεσμάτων της συγκεκριμένης στενής ζώνης. Το Σχήμα 13.3 επίσης παρουσιάζει τις συνολικές μέσες ERP κυματομορφές ως προς το ερέθισμα που καταγράφηκαν και για τα τρία είδη κινήσεων (εστιγμένες γραμμές). Μία ξεκάθαρη ERP απάντηση με κορύφωση στα 125msec μετά την εμφάνιση του περιφερειακού στόχου παρατηρείται και για τα τρία είδη κινήσεων. Συνεπώς, παρατηρούμε μία ξεκάθαρη διαφοροποίηση μεταξύ των τριών ειδών κινήσεων στη ζώνη των 40Hz.

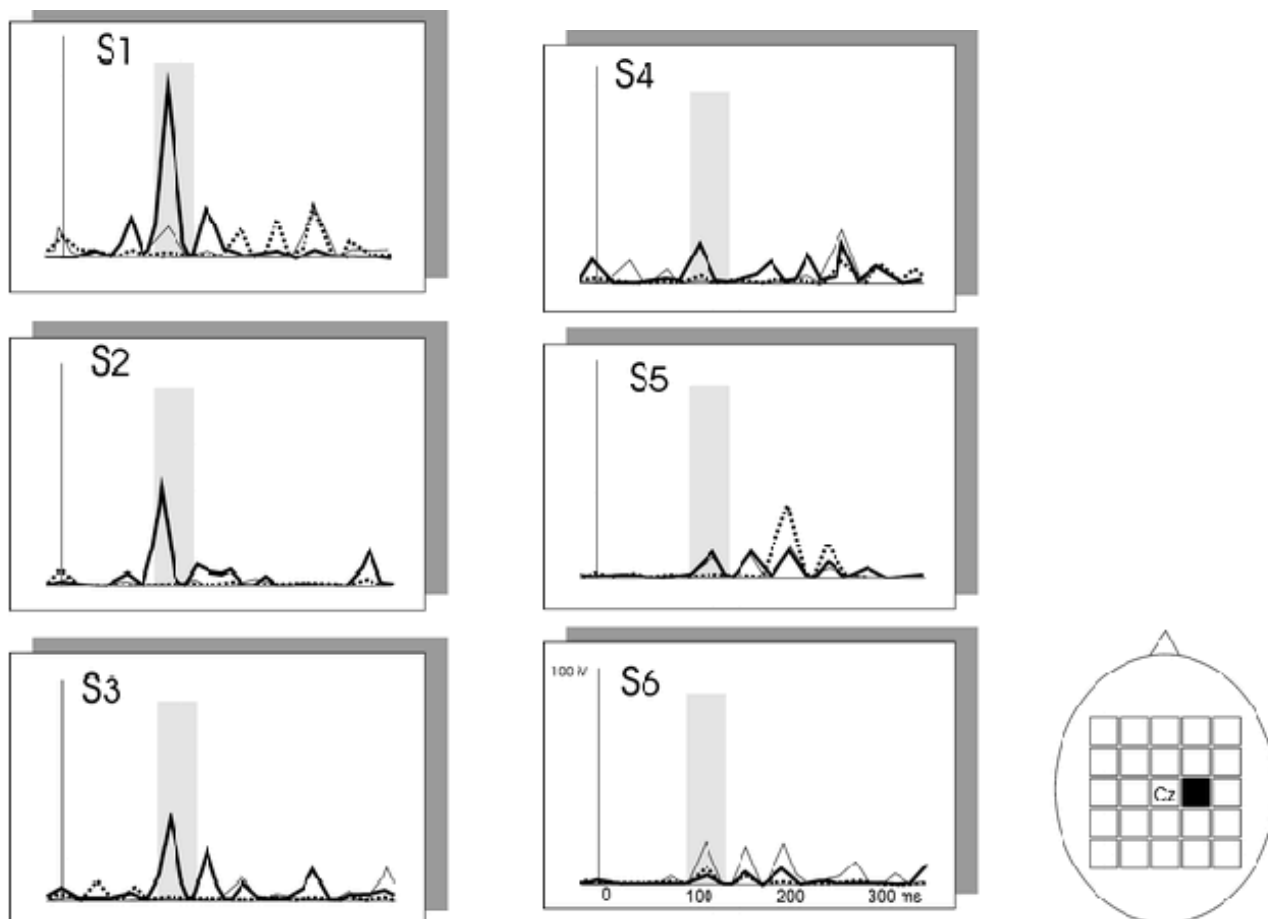
Το Σχήμα 13.5 παρουσιάζει τη δραστηριότητα των 40Hz που αντιστοιχεί στα ERP ως προς το ερέθισμα κάθε συμμετέχοντα για το ηλεκτρόδιο C_2 . Παρατηρούμε μια σαφή διαφοροποίηση της δραστηριότητας των 40Hz μεταξύ της προσακκαδικής κίνησης και των άλλων δύο ειδών κίνησης στα 100ms μετά την εμφάνιση του περιφερειακού στόχου, στους 4 από τους 6 συμμετέχοντες. Σε ένα συμμετέχοντα ($S5$), η δραστηριότητα των 40Hz είναι ίδια για την προσακκαδική και την αντισακκαδική κίνηση και μεγαλύτερη από την αντίστοιχη δραστηριότητα για την 'καμία κίνησή', ενώ για τον συμμετέχοντα $S6$ η δραστηριότητα της αντισακκαδικής κίνησης είναι πολύ μεγαλύτερη τόσο από αυτή της προσακκαδικής όσο και από αυτή της καμίας κίνησης. Οι καταγραφές των δύο



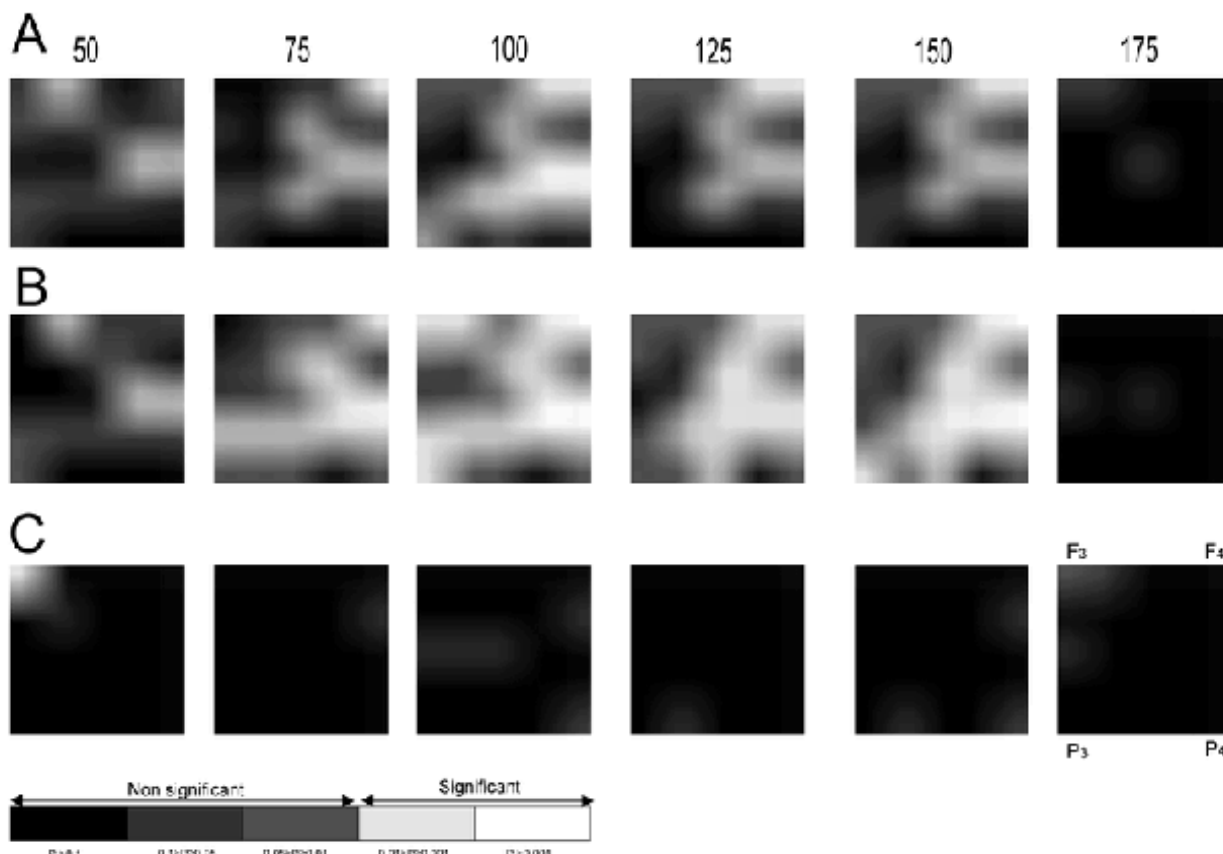
Σχήμα 13.3: ERP και δραστηριότητα 40Hz ως προς το ερέθισμα. Απεικονίζονται ο συνολικός μέσος όρος των ERP (εστιγμένη γραμμή) και η δραστηριότητα των 40Hz (συνεχής γραμμή) για όλα τα ηλεκτρόδια. Οι κυματομορφές των ERP είναι σχεδιασμένες σε μV και η δραστηριότητα των 40Hz σχεδιάζεται σε τιμές ενέργειας (μV^2). Ο συνολικός χρόνος μετά την εμφάνιση του περιφερειακού στόχου (γεγονός που σημειώνεται με την κάθετη γραμμή) είναι 350msec. A: Προσακκαδική κίνηση, B: Αντισακκαδική κίνηση και C: Καμία κίνηση



Σχήμα 13.4: Η συνολική μέση δραστηριότητα των 40Hz για τα τρία είδη κινήσεων (η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί στην προσακκαδική κίνηση, η λεπτή γραμμή αντιστοιχεί στην αντισακκαδική και η εστιγμένη γραμμή στην καμία κίνηση), για τρία ηλεκτρόδια σε κάθε ζώνη συχνοτήτων: A: ζώνη 25–31.25Hz B: ζώνη 31.25–37.5Hz C: ζώνη 37.5–43.75Hz και D: ζώνη 43.75–50Hz. Η δραστηριότητα σχεδιάζεται σε μV^2 . Ξεκάθαρη διαφοροποίηση μεταξύ των τριών ειδών κινήσεων παρατηρείται στη ζώνη 37.5 – 43.75Hz (ζώνη 40Hz). Η κορύφωση της δραστηριότητας στα 100msec για την προσακκαδική κίνηση είναι μεγαλύτερη από ό,τι για την αντισακκαδική και την καμία κίνηση. Διαφοροποίηση, αλλά μικρότερη, εμφανίζεται επίσης στη ζώνη 43.75 – 50Hz. Στις χαμηλότερες ζώνες συχνοτήτων η δραστηριότητα στα 100msec είναι πολύ μικρή και δεν παρατηρούνται διαφορές μεταξύ των τριών ειδών κινήσεων.



Σχήμα 13.5: Η δραστηριότητα των 40Hz για κάθε συμμετέχοντα υπολογισμένη από τη μέση ERP κυματομορφή που αντιστοιχεί στο ηλεκτρόδιο C_2 . Η δραστηριότητα των 40Hz σχεδιάζεται σε μV^2 . Οι συμμετέχοντες S1 έως και S4 παρουσιάζουν σαφή αύξηση της ενεργοποίησης στα 100ms (γκρι λωρίδα) μετά την εμφάνιση του οπτικού ερεθίσματος για την προσακκαδική κίνηση (συνεχής γραμμή) σε σύγκριση με την αντισακκαδική κίνηση (λεπτή γραμμή) και την καμία κίνηση (εστιγμένη γραμμή). Για τον S5 η δραστηριότητα της προσακκαδικής και αντισακκαδικής κίνησης είναι περίπου ίδιες και μεγαλύτερες από αυτή της καμίας κίνησης. Για τον S6 η δραστηριότητα της αντισακκαδικής κίνησης είναι μεγαλύτερη από αυτή της προσακκαδικής και της καμίας κίνησης. Η δραστηριότητα στα 100ms των συμμετεχόντων S5 και S6 είναι μικρότερη από αυτή των άλλων τεσσάρων συμμετεχόντων.



Σχήμα 13.6: Οι διαφορές ανάμεσα στα είδη των κινήσεων. Η σειρά των σχεδίων αποτελεί γραφική αναπαράσταση των τιμών πιθανότητας (P) η διαφορά στη δραστηριότητα των 40Hz μεταξύ των ειδών κίνησης που προκύπτει για τα δεδομένα μετά από την ανάλυση μεταθέσεων για κάθε χρονικό παράθυρο να είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη πραγματική διαφορά. Κάθε σχήμα αποτελεί απεικόνιση αυτών των πιθανοτήτων για τα 25 ηλεκτρόδια χρησιμοποιώντας μία διαδικασία απεικόνισης για καλύτερα οπτικά αποτελέσματα. A: Διαφορά προσακκαδικής και αντισακκαδικής. B: Διαφορά αντισακκαδικής και καμίας κίνησης. C: Διαφορά αντισακκαδικής και καμίας κίνησης. Σημαντική διαφορά ($P < 0.01$) που ξεκινά ακόμη από τα 50ms μετά την εμφάνιση του περιφερειακού στόχου και η οποία κορυφώνεται στα 100ms είναι εμφανής στη σειρά A και ακόμη περισσότερο εμφανής στη σειρά B.

τελευταίων συμμετεχόντων παρουσίασαν χαμηλή συνολική ενέργεια στα 100ms μετά την εμφάνιση του οπτικού ερεθίσματος. Μια τελική παρατήρηση είναι ότι, σε όλους τους συμμετέχοντες, η δραστηριότητα στα 100ms που αντιστοιχεί στην περίπτωση της καμίας κίνησης είναι πάντοτε η μικρότερη.

Η ανάλυση μεταθέσεων επιβεβαίωσε τη σημαντική διαφορά στη δραστηριότητα των 40Hz μεταξύ της προσακκαδικής και της αντισακκαδικής κίνησης καθώς επίσης και μεταξύ της προσακκαδικής και της καμίας κίνησης. Όπως αναμενόταν, η διαφορά στη δραστηριότητα των 40Hz μεταξύ της αντισακκαδικής και της καμίας κίνησης δεν είναι σημαντική. Το Σχήμα 13.6 παρουσιάζει την απεικόνιση σε κλίμακα του γκρι κωδικοποιημένη με βάση την πιθανότητα η διαφορά μεταξύ των ειδών κίνησης για τα δεδομένα που προκύπτουν από τις μεταθέσεις να είναι μεγαλύτερη από την πραγματική διαφορά (A: προσακκαδική κίνηση ως προς την αντισακκαδική κίνηση, B: προσακκαδική κίνηση ως προς την καμία κίνηση, C: αντισακκαδική κίνηση ως προς την καμία κίνηση) για όλα τα ηλεκτρόδια, για καθένα από τα 6 χρονικά παράθυρα (50–175ms). Σημαντική διαφορά ($P < 0.01$) μεταξύ της προσακκαδικής και της αντισακκαδικής κίνησης εμφανίζεται στο

παράθυρο των 50msec, είναι περισσότερο έντονη στο χρονικό παράθυρο των 100msec και εξακολουθεί να υπάρχει τόσο στα 125msec, όσο και στα 75msec και στα 150msec. Η μεγάλη διαφορά στα 100msec παρατηρείται κυρίως στα ηλεκτρόδια C_2 , C_4 , CP_1 , CP_z , CP_2 και CP_4 . Η διαφορά ανάμεσα στην προσακκαδική κίνηση και στην καμία κίνηση είναι επίσης σημαντική για τα χρονικά παράθυρα 50 – 150msec και σε ακόμη περισσότερα ηλεκτρόδια. Αντίθετα, η διαφορά ανάμεσα στην αντισακκαδική κίνηση και στην καμία κίνηση δεν είναι σημαντική. Η ανάλυση μεταθέσεων δεν έδειξε καμία σημαντική διαφορά στα ERP για τα χρονικά παράθυρα από 50 – 175msec σε κανένα από τα ηλεκτρόδια. Συνεπώς, η ανάλυση μεταθέσεων επιβεβαίωσε ότι οι σημαντικές διαφορές στη δραστηριότητα των 40Hz μεταξύ της προσακκαδικής και των άλλων δύο κινήσεων συμβαίνει περίπου 100msec μετά την εμφάνιση του περιφερειακού στόχου και παρουσιάζει μια κεντρο-βρεγματική κατανομή με κυριαρχία στο δεξί ημισφαίριο.

Επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων της ανάλυσης μεταθέσεων έγινε με την Kruskal-Wallis ANOVA στα χρονικά παράθυρα των 75 – 175msec χρησιμοποιώντας τις τιμές της δραστηριότητας των 40Hz κάθε συμμετέχοντα για κάθε είδος κίνησης. Μια ξεχωριστή ανάλυση έγινε χρησιμοποιώντας τις τιμές πλατών των ERP κάθε συμμετέχοντα για κάθε είδος κίνησης για τα 6 ηλεκτρόδια για τα οποία η ανάλυση μεταθέσεων ανέδειξε τις πιο σημαντικές διαφορές στη δραστηριότητα των 40Hz. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης παρουσιάζονται στον πίνακα 13.1. Παρουσιάζεται σημαντική διαφορά στη δραστηριότητα των 40Hz αλλά όχι για τα ERP, στα χρονικά παράθυρα των 75 – 150msec. Αντίθετα, στο χρονικό παράθυρο των 175msec δεν αναδεικνύονται σημαντικές διαφορές στη δραστηριότητα των 40Hz, ενώ παρατηρείται οριακά σημαντική διαφορά στα ERP.

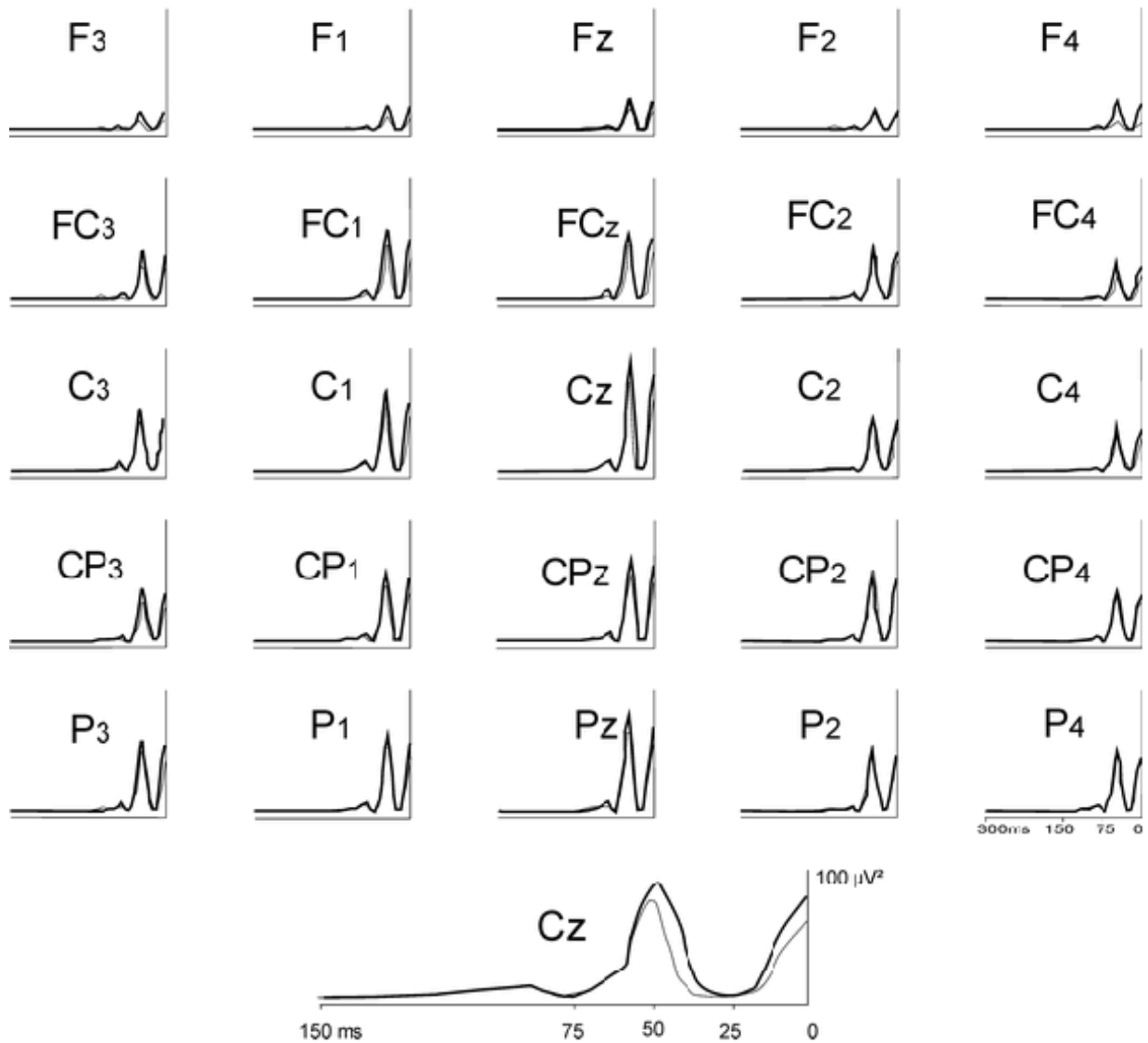
Πίνακας 13.1: Τα αποτελέσματα της Kruskal-Wallis ANOVA ανάλυσης για τις διαφορές μεταξύ της δραστηριότητας των 40Hz (πρώτη στήλη) και των ERP (δεύτερη στήλη) των κινήσεων για κάθε χρονικό παράθυρο (τιμές H και επίπεδο P), για το σύνολο των 6 ηλεκτροδίων που παρουσιάζουν σημαντική διαφορά με βάση την ανάλυση μεταθέσεων.

Χρονικό Παράθυρο	GBR	ERP
75ms	$H = 18.369, P < 0.001$	$H = 1.265, NS$
100ms	$H = 26.498, P < 0.0001$	$H = 0.394, NS$
125ms	$H = 25.624, P < 0.0001$	$H = 5.122, NS$
150ms	$H = 28.792, P < 0.0001$	$H = 3.375, NS$
175ms	$H = 4.919, NS$	$H = 6.055, P = 0.048$

13.3.1 Δραστηριότητα 40Hz ως προς την κίνηση

Το Σχήμα 13.7 παρουσιάζει τη δραστηριότητα των 40Hz ως προς την κίνηση για την προσακκαδική και την αντισακκαδική κίνηση. Η δραστηριότητα είναι περίπου η ίδια και για τις δύο κινήσεις. Το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα παρατηρείται και σε όλες τις υπόλοιπες ζώνες συχνοτήτων. Συνεπώς, η διαφορά που είχε παρατηρηθεί σε προηγούμενη ανάλυση μεταξύ των ERP της προσακκαδικής και της αντισακκαδικής κίνησης [31] δεν παρατηρείται στη δραστηριότητα των 40Hz.

Η δραστηριότητα των 40Hz ως προς την κίνηση εμφανίζεται πολύ αργά (τα τελευταία 100msec πριν από την έναρξη της κίνησης) και κορυφώνεται στα 50msec πριν από την έναρξη της κίνησης. Μάλιστα, είναι περισσότερο εμφανής στα κεντρο-βρεγματικά ηλεκτρόδια, όπως ακριβώς ήταν και τα προκίνητικα δυναμικά ERP που καταγράφηκαν πριν από τις σακκαδικές κινήσεις [31]. Η τελευταία συνιστώσα της δραστηριότητας των 40Hz που εμφανίζεται 25msec πριν από την έναρξη της κίνησης επικαλύπτεται με την έναρξη της κίνησης. Συνεπώς, η δραστηριότητα στις υψηλές συχνότητες είναι στην πραγματικότητα παρούσα πριν από την έναρξη της σακκαδικής κίνησης, αλλά, σε αντίθεση με τη δραστηριότητα των 40Hz ως προς το ερέθισμα, η δραστηριότητα ως προς την έναρξη της κίνησης δεν διαφοροποιεί τα δύο είδη κίνησης σε καμία ζώνη συχνοτήτων.



Σχήμα 13.7: Δραστηριότητα των 40Hz ως προς την έναρξη της κίνησης. Απεικονίζεται η συνολική δραστηριότητα των 40Hz για την προσακκαδική κίνηση (παχιά γραμμή) και την αντισακκαδική κίνηση (λεπτή γραμμή) για τα 25 ηλεκτρόδια. Η δραστηριότητα των 40Hz σχεδιάζεται σε μV^2 . Είναι ευθυγραμμισμένη ως προς την έναρξη της κίνησης (δεξιά κάθετη γραμμή) και ο συνολικός χρόνος είναι 350msec. Στο κάτω μέρος του σχήματος ξανασχεδιάζεται σε μεγέθυνση η δραστηριότητα των 40Hz για το ηλεκτρόδιο C_z .

13.4 Ανάλυση αποτελεσμάτων

Παρατηρήσαμε την ύπαρξη σημαντικής διαφοροποίησης ως προς τη δραστηριότητα των 40Hz ανάμεσα στα είδη κίνησης. Η διαφοροποίηση αυτή συμβαίνει στα 100mssec μετά την εμφάνιση του περιφερειακού στόχου. Η προσακκαδική κίνηση είναι το μόνο είδος κίνησης που παρουσίασε μια σταθερή σημαντική δραστηριότητα στους 40Hz που ακολουθεί την εμφάνιση του περιφερειακού στόχου. Το αποτέλεσμα αυτό που χαρακτηρίζει το συγκεκριμένο είδος κίνησης παρατηρείται μόνο στη ζώνη των 40Hz και μόνο για τη δραστηριότητα ως προς το ερέθισμα και δεν εμφανίζεται σε καμία άλλη ζώνη συχνοτήτων. Επιπλέον, δεν παρατηρήθηκε καμία διαφορά στη δραστηριότητα των 40Hz ως προς την κίνηση μεταξύ της προσακκαδικής και της αντισακκαδικής κίνησης. Αυτή η δραστηριότητα των 40Hz ως προς το ερέθισμα που παρατηρείται στην προσακκαδική κίνηση 100mssec μετά την εμφάνιση του ερεθίσματος, εμφανίζει κεντρο-βρεγματική κατανομή με έμφαση στο δεξί ημισφαίριο.

Παρόμοια στοιχεία για δραστηριότητα στη γάμμα ζώνη, 100mssec μετά την εμφάνιση του ερεθίσματος, έχει παρατηρηθεί και σε οπτικά [16] και σε ακουστικά προκλητά [94]. Πολλές υποθέσεις έχουν αναπτυχθεί σχετικά με την πηγή προέλευσής της, την επαγωγή και τη διαμόρφωσή της. Για παράδειγμα, σχετικά με την οπτική δραστηριότητα στη γάμμα ζώνη, έχει διατυπωθεί το συμπέρασμα [124] ότι η συγχρονισμένη συνιστώσα που εμφανίζεται στα 100mssec μετά την έναρξη του ερεθίσματος μπορεί να προκύπτει ως αποτέλεσμα μιας περισσότερο γενικής διαδικασίας θαλαμοφλοιϊκής ενεργοποίησης, κάτι που συμφωνεί και με την άποψη των Llinas και Ribary [78], με δεδομένο ότι αυτή η δραστηριότητα δεν διαμορφώνεται από τις οπτικές ιδιότητες του ερεθίσματος. Επιπλέον, σε μια πρόσφατη μελέτη [16] περιγράφηκαν δύο μέγιστα για την οπτικά επαγόμενη συγχρονισμένη δραστηριότητα στη γάμμα ζώνη, στα 100mssec μετά την εμφάνιση του ερεθίσματος, ένα στις περιοχές των κεντρικών ηλεκτροδίων (C_z) και ένα στις ινιακές περιοχές (O_z). Μάλιστα, οι ερευνητές θεωρούν ότι αυτά τα μέγιστα αντανακλούν τη δραστηριότητα δύο γεννητριών. Η μία εκπηγάζει από βαθιές δομές (θάλαμος) και η άλλη από τον οπτικό φλοιό. Η δραστηριότητα των 40Hz ως προς το ερέθισμα που παρατηρήσαμε είναι χαρακτηριστική της προσακκαδικής κίνησης, παρόλο που παρόμοια οπτικά ερεθίσματα χρησιμοποιήθηκαν και για τα τρία είδη κίνησης. Σημειώνεται ότι τα ERP είναι παρόμοια και για τα τρία είδη κίνησης και ως προς το πλάτος και ως προς την καθυστέρηση. Επιπλέον, τα μέγιστα αυτής της δραστηριότητας των 40Hz παρατηρούνται στις κεντροβρεγματικές περιοχές, με κυριαρχία στο δεξιό ημισφαίριο. Επομένως, ένας γενικός μηχανισμός αντίληψης δεν εξηγεί το ειδικό χαρακτηριστικό της δραστηριότητας των 40Hz ως προς το ερέθισμα.

Από προηγούμενες μελέτες γνωρίζουμε ότι η ακουστική προκλητή δραστηριότητα της γάμμα ζώνης αντιστοιχεί στη δραστηριότητα του τμήματος του φλοιού που σχετίζεται με την ακουστική λειτουργία [94]. Αυτή η ακουστική δραστηριότητα της γάμμα ζώνης διαμορφώνεται από την προσοχή [132]. Η δραστηριότητα ως προς το ερέθισμα των 40Hz που παρατηρήσαμε, δεν μπορεί να αποδοθεί σε επιλεκτικούς μηχανισμούς προσοχής επειδή και στα τρία είδη κίνησης απαιτείται η προσοχή των συμμετεχόντων και προς τα τρία είδη του περιφερειακού στόχου, προκειμένου να χωρήσουν στην προσήκουσα απάντηση. Επιπλέον, και ίσως το πιο σημαντικό είναι ότι η απόδοση των συμμετεχόντων και στα τρία είδη κίνησης είναι σχεδόν αλάνθαστη [31]. Μάλιστα υπολογίσαμε τη δραστηριότητα που αντιστοιχεί στο ERP χρησιμοποιώντας μόνο τις σωστές απαντήσεις. Επομένως, οι μηχανισμοί προσοχής δεν μπορούν να εξηγήσουν τα αποτελέσματά μας.

Οι συγκεκριμένες διαφορές στη δραστηριότητα ως προς το ερέθισμα των 40Hz μεταξύ των τριών ειδών κίνησης πρέπει να συσχετιστούν με τα συγκεκριμένα ειδικά χαρακτηριστικά κάθε είδους κίνησης. Στην προσακκαδική κίνηση, το οπτικό ερέθισμα λειτουργεί ως στόχος της κίνησης του ματιού και επομένως απαιτεί ένα οπτικοκινητικό μετασχηματισμό. Στην περίπτωση της καμίας κίνησης ένας τέτοιος μετασχηματισμός δεν είναι απαραίτητος. Στην περίπτωση της αντισακκαδικής κίνησης η πληροφορία κατεύθυνσης είναι απαραίτητη για το σχεδιασμό σακκαδικής κίνησης προς

την αντίθετη κατεύθυνση. Θα μπορούσαμε επομένως να υποθέσουμε ότι υπάρχει μια συγκεκριμένη σχέση μεταξύ οπτικοκινητικού μετασχηματισμού και δραστηριότητας ως προς το ερέθισμα των 40Hz. Το γεγονός ότι το μέγιστο της παρατηρούμενης απόκρισης εντοπίζεται στη δεξιά κεντρο-βρεγματική περιοχή ίσως αποτελεί επιπλέον ένδειξη της οπτικοχωρικής επεξεργασίας με δεδομένο τον καλά επιβεβαιωμένο ρόλο που διαδραματίζει το δεξιό βρεγματικό ημισφαίριο σε τέτοιες διαδικασίες. Επιπλέον, έχει υποστηριχθεί [6] ότι ο οπίσθιος βρεγματικός φλοιός αποτελεί την κατάλληλη διεπαφή μεταξύ των οπτικών και κινητικών περιοχών και λειτουργεί ως ένα συγκεκριμένο μέσο οπτικοκινητικών μετασχηματισμών σχετικών με τις σχεδιαζόμενες κινήσεις του ματιού ή του βραχίονα [6], [44], [84]. Επιπλέον, έχειδειχθεί [116] ότι όταν η προσοχή σε μια συγκεκριμένη θέση διαχωρίζεται από την πρόθεση της κίνησης, η δραστηριότητα των οπίσθιων βρεγματικών νευρώνων αντανακλά κυρίως την πρόθεση για κίνηση. Τα αποτελέσματά μας επίσης δείχνουν ότι ένας μηχανισμός προσοχής στο χώρο, στη θέση του στόχου, δεν μπορεί να εξηγήσει τη δραστηριότητα ως προς το ερέθισμα των 40Hz για την προσακκαδική κίνηση μόνο. Μία πρόθεση κίνησης θα μπορούσε να είναι παρούσα και στα τρία είδη κίνησης, ενεργοποιώντας το βρεγματικό φλοιό, ο οποίος στη συνέχεια θα καταστέλλοταν από την ενεργοποίηση του εμπρόσθιου φλοιού στην περίπτωση μιας συνθήκης αντισακκαδικής κίνησης [51] ή μιας συνθήκης καμίας κίνησης [63]. Σε μια πρόσφατη μελέτη, οι οπίσθιοι βρεγματικοί νευρώνες του φλοιού [45] ενεργοποιούνταν σταθερά πριν την εκτέλεση των αντισακκαδικών κινήσεων. Επομένως, ένας οπτικοκινητικός μετασχηματισμός θα μπορούσε να είναι παρών και στα τρία είδη κίνησης (αποκρίσεων). Ωστόσο, ο χρονισμός αυτού του μετασχηματισμού και η συμμετοχή του οπίσθιου βρεγματικού φλοιού σε αυτόν θα μπορούσε να διαφέρει ανάλογα με τον τύπο της απόκρισης. Εάν οι συμμετέχοντες μάθαιναν μετά από μερικές πρώτες προσπάθειες έναν 'κανόνα' που συσχετίζει τον καμπύλο στόχο (κύκλος) με την προσακκαδική κίνηση (οι άλλοι δύο στόχοι έχουν σχήματα με γωνίες), τότε θα μπορούσαν να ψάχνουν για καμπυλότητες στο σχήμα του στόχου και να αποφασίζουν πολύ γρήγορα καταλήγοντας σε απευθείας υπολογισμό της πρόθεσης κίνησης στην περίπτωση της προσακκαδικής απόκρισης. Στην περίπτωση των άλλων δύο ειδών κίνησης που η συμβατότητα ερεθίσματος - απάντησης δεν ήταν ισχυρή, οι συμμετέχοντες θα μπορούσαν να είχαν χρησιμοποιήσει μια διαφορετική στρατηγική καθυστέρησης της απόφασης μέχρι να ολοκληρωθεί ο οπτικός διαχωρισμός του στόχου. Αυτός ο πρώιμος διαχωρισμός ή/και ο υπολογισμός της πρόθεσης κίνησης θα μπορούσε να συσχετίζεται με την εμφάνιση της απόκρισης των 40Hz που είναι συγχρονισμένη με το ερέθισμα.

Ενδείξεις από άλλα παραδείγματα οπτικής αναγνώρισης καταλήγουν στο ότι οι οπτικοί διαχωρισμοί συμβαίνουν πολύ νωρίς κατά τη διαδικασία της επεξεργασίας της οπτικής πηγής [102]. Επιπλέον, σε ένα παράδειγμα μνημονικής σακκαδικής κίνησης έχειδειχθεί [44] ότι η δραστηριότητα νευρώνων που προσδιορίζει κίνηση εμφανίζεται στον οπίσθιο βρεγματικό φλοιό, σε λιγότερο από 100msec μετά την εμφάνιση του ερεθίσματος. Επομένως, τόσο ένας οπτικός διαχωρισμός, όσο και ένας οπτικοκινητικός μετασχηματισμός μπορούν να συμβαίνουν πολύ νωρίς (100msec) μετά την εμφάνιση του ερεθίσματος. Η υπόθεση ότι η μεταβατική δραστηριότητα των 40Hz μπορεί να αντανακλά ένα γρήγορο οπτικοκινητικό μετασχηματισμό στο βρεγματικό φλοιό όταν η συμβατότητα ερεθίσματος - απάντησης είναι ισχυρή, θα μπορούσε επίσης να εξηγήσει τα αποτελέσματα μιας μελέτης που μέτρησε τη δραστηριότητα στη γάμμα ζώνη σε μια GO/NOGO απόκριση [112]. Στη μελέτη αυτή χρησιμοποιήθηκαν δύο οπτικά ερεθίσματα (βέλη) που καθοδηγούσαν τους συμμετέχοντες είτε να πατήσουν ένα κουμπί (συνθήκη GO) είτε να κρατήσουν την απάντησή τους (συνθήκη NOGO). Η φασματική ανάλυση της προκλητής απάντησης δεν έδειξε καμία ουσιαστική δραστηριότητα στην περιοχή των 40Hz για καμία από τις δύο συνθήκες των προσπαθειών. Δεδομένου ότι το ερέθισμα για την GO συνθήκη (βέλος με φορά προς τα κάτω) δεν αποτελούσε κάποιο στόχο στο χώρο για την απάντηση (πάτημα κουμπιού), η συμβατότητα ερεθίσματος - απάντησης δεν ήταν ισχυρή και συνεπώς αποκλείεται η ύπαρξη ενός γρήγορου οπτικού κινητικού μετασχηματισμού που θα συσχετιζόταν με μια απόκριση στους 40Hz.

Ένα θέμα που παραμένει σε εκκρεμότητα είναι το γεγονός ότι, αν και η δραστηριότητα ως προς

το ερέθισμα στην περιοχή των 40Hz που εμφανίζεται στα 100msec μετά την εμφάνιση του ερεθίσματος διαχωρίζει την προσακκαδική απόκριση από τις άλλες δύο αποκρίσεις, εντούτοις υπάρχει σημαντική καθυστέρηση (200msec) μεταξύ της ενεργοποίησης της απάντησης στον υποτιθέμενο οπτικό διαχωρισμό ή/και το σχεδιασμό της κίνησης και στο τελικό όριο για την απόκριση-κίνηση. Παρατηρήθηκε μια σημαντική μείωση στο χρόνο απόκρισης για την προσακκαδική κίνηση σε σύγκριση με την αντισακκαδική, αλλά είναι πολύ μικρή (διαφορά 26.5msec, $t = -4.31$, $P < 0.01$, βλέπε Σχήμα 13.1).

Παρατηρήσαμε διαφορά μεταξύ των αποκρίσεων μόνο για τη δραστηριότητα ως προς το ερέθισμα στην περιοχή των 40Hz. Η δραστηριότητα ως προς την κίνηση στην περιοχή των 40Hz για την προσακκαδική και την αντισακκαδική κίνηση ήταν σχεδόν ταυτόσημη. Παρατηρείται μια σαφής κορυφή στα 50msec πριν από την έναρξη της κίνησης του ματιού, η οποία είναι επίσης σταθερή ακριβώς πριν από την έναρξη της απάντησης (25msec πριν από την έναρξη της κίνησης). Αυτή η τελευταία συνιστώσα μπορεί να συσχετίζεται με μυϊκά παράσιτα που καλούνται δυναμικό αιχμής [131]. Δραστηριότητα στη γάμμα ζώνη που σχετίζεται με κίνηση έχει επίσης παρατηρηθεί ακριβώς πριν από την εκτέλεση κινήσεων δακτύλων [96]. Η χωρική κατανομή της δραστηριότητας ως προς την κίνηση στην περιοχή των 40Hz είναι διάχυτη με τη μεγαλύτερη ενεργοποίηση στις κεντρικές και βρεγματικές περιοχές. Η κατανομή αυτή είναι παρόμοια με την κατανομή των ERP ως προς την κίνηση που καταγράφηκε πριν από οπτικά προκαλούμενες σακκαδικές κινήσεις [32]. Η δραστηριότητα αυτή που δεν διαχωρίζει την προσακκαδική από την αντισακκαδική απόκριση, μπορεί να σχετίζεται με τη διαδικασία της προετοιμασίας της κίνησης.

Συμπερασματικά, μια σαφής δραστηριότητα στην περιοχή των 40Hz που κορυφώνεται 100msec πριν από την έναρξη της κίνησης συμβαίνει μόνο όταν το ερέθισμα αποτελεί και το στόχο της επερχόμενης κίνησης του ματιού (προσακκαδική απόκριση). Το μέγιστο αυτής της δραστηριότητας συμβαίνει στις κεντρο-βρεγματικές περιοχές του δεξιού ημισφαιρίου. Το σήμα αυτό μπορεί να ανταναχλά την επεξεργασία στον οπίσθιο βρεγματικό φλοιό ενός μετασχηματισμού του οπτικού ερεθίσματος σε κινητική απάντηση. Τα ειδικά χαρακτηριστικά της δραστηριότητας αυτής ως προς το χρόνο (μετά την εμφάνιση του ερεθίσματος) και ως προς το είδος της απόκρισης (προσακκαδική κίνηση), παρόλο που δεν είναι πλήρως εξηγήσιμα ως προς το συμπεριφορικό αποτέλεσμα, είναι εξαιρετικά ενδιαφέροντα και συνιστούν περαιτέρω διερεύνηση του σήματος αυτού και της σημαντικότητάς του ως μέσο της μελέτης των γρήγορων οπτικοκινητικών μετασχηματισμών.

Μέρος V

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Κεφάλαιο 14

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα διατριβή μελετήσαμε την εφαρμογή προχωρημένων μη γραμμικών τεχνικών επεξεργασίας σήματος στο ηλεκτροεγκεφαλογράφημα και αναπτύξαμε μη γραμμικά μοντέλα, με τα οποία μπορούν να περιγραφούν τα ΗΕΓ σήματα. Μελετήσαμε δύο ειδών σήματα: το ΗΕΓ που αντιστοιχεί σε κατάσταση ηρεμίας, με τα μάτια κλειστά και τα προκλητά δυναμικά. Στην πρώτη περίπτωση αναζητήσαμε μεθόδους που περιγράφουν ικανοποιητικά το σήμα και παρέχουν μεγέθη που είναι χαρακτηριστικά για τα σήματα αυτά. Στη δεύτερη περίπτωση μελετήσαμε στο χώρο και στο χρόνο την εμφάνιση δραστηριότητας στη γάμμα ζώνη, που είναι χαρακτηριστική για την εκτέλεση συγκεκριμένων αποκρίσεων-κινήσεων που επιβάλλουν οι πειραματικές συνθήκες.

Κατά τη μελέτη του ΗΕΓ σε κατάσταση ηρεμίας, αφού διαπιστώσαμε με την εφαρμογή διαφόρων τεχνικών ότι τα γραμμικά μοντέλα δεν είναι αρκετά για την περιγραφή όλων των κατηγοριών του, προχωρήσαμε στην εφαρμογή των μεθόδων της μη γραμμικής ανάλυσης. Θεωρώντας ότι τα υπό μελέτη σήματα είναι μη γραμμικά ντετερμινιστικά, ανακατασκευάσαμε τις τροχιές στο φασικό χώρο και υπολογίσαμε τη διάσταση συσχετισμού και τους εκθέτες Lyapunov που αποτελούν τα αναλλοίωτα χαρακτηριστικά μεγέθη των ανακατασκευασμένων ελκυστών. Δείξαμε ότι η διάσταση συσχετισμού εξαρτάται από την εγκεφαλική περιοχή στην οποία αντιστοιχεί, με τις υψηλότερες τιμές να αντιστοιχούν σε περιοχές όπου πιστεύεται από τους νευροφυσιολόγους ότι πραγματοποιούνται λειτουργίες που απαιτούν μεγαλύτερη επεξεργασία πληροφορίας. Μάλιστα, το προφίλ της διάστασης συσχετισμού είναι διαφορετικό στους αριστερόχειρες από ό,τι στους δεξιόχειρες. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να διαχωρίσουμε τους αριστερόχειρες από τους δεξιόχειρες με ποσοστό επιτυχίας μεγαλύτερο από το ποσοστό που προκύπτει από τη χρήση γραμμικών μεγεθών. Ο διαχωρισμός αυτός κατατείνει στην ανάδειξη του κυρίαρχου ημισφαιρίου του εγκεφάλου, κάτι που είναι απαραίτητο να γίνει πριν από χειρουργικές επεμβάσεις. Η προσπάθεια αυτή διαχωρισμού χρησιμοποιώντας απλώς καταγραφές του ΗΕΓ είναι ιδιαίτερα σημαντική για τους γιατρούς γιατί κάτι τέτοιο σήμερα δεν είναι εφικτό. Σήμερα χρησιμοποιούνται άλλες μέθοδοι που απαιτούν τη χορήγηση φαρμάκων και δεν είναι πάντοτε ανώδυνες για τους εξεταζόμενους. Ωστόσο, πρέπει να σημειώσουμε ότι τα ευρήματά μας αποτελούν πρώτες ενδείξεις και απαιτείται σημαντική περαιτέρω προσπάθεια για την επιβεβαίωσή τους σε μεγάλο δείγμα πληθυσμού.

Η μελέτη των ΗΕΓ καταγραφών σε κατάσταση ηρεμίας περιελάμβανε επίσης και τη συγκριτική αναλυτική μελέτη των αλγορίθμων υπολογισμού του φάσματος των εκθετών Lyapunov. Η μελέτη έδειξε ότι μεταξύ των αλγορίθμων υπολογισμού του μεγαλύτερου εκθέτη Lyapunov, ο αλγόριθμος που πρότειναν οι Rosenstein et al. είναι αυτός που παρέχει τα σταθερότερα αποτελέσματα. Μεταξύ των αλγορίθμων υπολογισμού ολοκλήρου του φάσματος των εκθετών Lyapunov, παρά τη μεγαλύτερη υπολογιστική του πολυπλοκότητα, ο αλγόριθμος των Brown et al. που χρησιμοποιεί μη γραμμικές προσεγγίσεις για την περιγραφή της εξέλιξης του στοιχειώδους όγκου των αρχικών συνθηκών, είναι αυτός που παρουσιάζει τα σταθερότερα αποτελέσματα. Βέβαια, πρέπει

να σημειώσουμε ότι εν γένει οι εκθέτες Lyapunov πρέπει να αντιμετωπίζονται με προσοχή καθότι, θεωρητικά, αφορούν την εξέλιξη του απειροστού όγκου αρχικών συνθηκών, ενώ στην πράξη υπολογίζονται από το σύνολο των πειραματικών δεδομένων.

Γενικότερα, σχετικά με τη μεθοδολογία της μη γραμμικής ανάλυσης σημειώνουμε ότι έχει αναπτυχθεί ένα πλήθος μεγεθών που χαρακτηρίζουν πολύπλοκες χρονοσειρές με βάση τις αρχές της μη γραμμικής δυναμικής. Τα μεγέθη αυτά, αν και έχουν αποδειχθεί αρκετά αξιόπιστα στις θεωρητικές μελέτες της συμπεριφοράς των μη γραμμικών συστημάτων, στην πράξη, η περίπλοκη φύση και η εγγενής τάση προς τη στοχαστικότητα και τη μη στατικότητα των φυσιολογικών χρονοσειρών κάνει δύσκολη, αν όχι αδύνατη, την ερμηνεία των μεγεθών αυτών. Στην πράξη, οι εκτιμήσεις τόσο της διάστασης συσχετισμού όσο και των υπολοίπων μεγεθών υπόκεινται σε σημαντική αβεβαιότητα λόγω του γεγονότος ότι το πλήθος των σημείων είναι πεπερασμένο. Επιπρόσθετα, οι πειραματικές συνθήκες είναι αρκετά διαφορετικές μεταξύ των διαφόρων μελετών. Ειδικότερα, οι αυθόρμητες γνωσιακές επεξεργασίες κατά τη διάρκεια των καταγραφών δεν μπορούν να εξακριβωθούν αφού η επαγρύπνηση, η εγρήγορση, η μνημονική επεξεργασία, το συναισθηματικό περιεχόμενο κλπ είναι εξαιρετικά προσωπικές μεταβλητές που δεν αναπαράγονται. Θα ήταν δυνατόν, ένας καλύτερος καθορισμός της νοητικής λειτουργίας κατά τη διάρκεια των ΗΕΓ καταγραφών να μείωνε τη μεταβλητότητα της διάστασης συσχετισμού. Επίσης, παρατηρούνται διαφορές στον τρόπο εφαρμογής των αλγορίθμων ανάμεσα στις διάφορες μελέτες. Για να υπερνικηθεί το πρόβλημα αυτό, πολλοί ερευνητές έχουν προτείνει τη χρήση πρότυπων πειραματικών συνθηκών κατά τη διάρκεια της συλλογής δεδομένων και της αξιολόγησής τους. Οι περισσότεροι ερευνητές σήμερα συμφωνούν ότι η ανάλυση χρονοσειρών πειραματικών δεδομένων και ειδικότερα των ΗΕΓ σημάτων, είναι εφικτή εάν η υλοποίηση των αλγορίθμων γίνεται με προσοχή. Με καλή κατανόηση των μεθόδων και μεγάλη προσοχή στην εφαρμογή τους, η μη γραμμική ανάλυση χρονοσειρών μπορεί να γίνει ένα ισχυρό εργαλείο στην αποτίμηση της δυναμικής πολύπλοκων συστημάτων, όπως ο ανθρώπινος εγκέφαλος.

Στη συνέχεια αναπτύξαμε δύο αλγορίθμους, έναν τύπου μπλοκ και ένα σειριακό, για την ταυτοποίηση του ελαχίστου κόστους μη γραμμικού καταχωρητή ολίσθησης με ανάδραση. Οι καταχωρητές αυτοί αποτελούν μοντέλα για την περιγραφή χρονοσειρών, όπως είναι το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα. Οι προτεινόμενες μέθοδοι συνδυάζουν τρία συστατικά: μία ολική διάταξη, έναν έλεγχο γραμμικής εξάρτησης και έναν έλεγχο ελαχίστου. Η ολική διάταξη διευκολύνει την αποτίμηση των καταχωρητών και προκύπτει από το γεγονός ότι κάθε καταχωρητής χαρακτηρίζεται από έναν πολυδείκτη που αντιπροσωπεύει την τάξη μη γραμμικότητας, τα πρωταρχικά σήματα και τις μέγιστες καθυστερήσεις. Η προτεινόμενη ολική διάταξη είναι ουσιαστικά μια ολικού βαθμού διάταξη επανζημένη με μια συνάρτηση κόστους που αντιπροσωπεύει το κόστος υλοποίησης. Οι συντελεστές ενός μη γραμμικού καταχωρητή που παράγει το δεδομένο σήμα ανήκουν στο μηδενικό χώρο ενός κατάλληλου πίνακα. Επομένως κάθε μη γραμμικός καταχωρητής αντιστοιχεί στην έκφραση μιας στήλης του πίνακα αυτού ως γραμμικού συνδυασμού των προηγούμενων στηλών. Ένα ειδικό χαρακτηριστικό του υπό εξέταση προβλήματος είναι ότι τα μήκη των στηλών του προαναφερθέντος πίνακα δεν είναι τα ίδια, γεγονός που αντιμετωπίστηκε με τους προτεινόμενους αλγόριθμους. Ο έλεγχος γραμμικής εξάρτησης που χρησιμοποιήθηκε επιτυγχάνει τον προηγούμενο στόχο με τη διαχείριση υπομπλοκ των στηλών. Το τρίτο συστατικό του αλγορίθμου προσαρμόζει τον έλεγχο γραμμικής εξάρτησης με την ολική διάταξη. Με αυτόν τον τρόπο προσδιορίζεται τελικώς ο μη γραμμικός καταχωρητής ολίσθησης που είναι ελάχιστος ως προς την ολική διάταξη.

Οι προτεινόμενοι αλγόριθμοι αποτελούν επέκταση του κλασικού Berlekamp - Massey αλγορίθμου, ο οποίος χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του γραμμικού καταχωρητή ολίσθησης με ανάδραση ελαχίστου μήκους και παρουσιάζει ένα μεγάλο πλήθος εφαρμογών. Η ολική διάταξη ως προς το μήκος των γραμμικών καταχωρητών αντικαθίσταται από μια ολική διάταξη που βασίζεται στο κόστος υλοποίησης των μη γραμμικών καταχωρητών. Ο γραμμικός καταχωρητής με το μικρότερο μήκος ενημερώνεται δείγμα προς δείγμα χρησιμοποιώντας τις αναδρομές του Berlekamp - Massey αλγορίθμου που βασίζονται στα σφάλματα. Εάν ο γραμμικός καταχωρητής δεν

μπορεί να παράγει το επόμενο δείγμα, το μήκος του καταχωρητή αυξάνεται κατά μοναδικό τρόπο. Στην περίπτωση των μη γραμμικών καταχωρητών υπάρχουν αρκετές εναλλακτικές πέρα από την αύξηση των καθυστερήσεων των γραμμικών όρων. Προφανείς επιλογές συμπεριλαμβάνουν την εισαγωγή ενός νέου πρωταρχικού σήματος ή την αύξηση των καθυστερήσεων μη γραμμικών όρων. Η διάταξη των εναλλακτικών στον προτεινόμενο αλγόριθμο επιτυγχάνεται από την ολική διάταξη. Η αξία των μη γραμμικών καταχωρητών έγγειται στον προσδιορισμό του μη γραμμικού καταχωρητή που παράγει τη δεδομένη χρονοσειρά και έχει κόστος υλοποίησης μικρότερο του αντίστοιχου γραμμικού καταχωρητή. Το μεγάλος εύρος εφαρμογών τους περιλαμβάνει μεταξύ άλλων εργαλεία σχεδίασης ισχυρών σχημάτων κρυπτογράφησης ή υλοποίησης ψευδοτυχαίων μη γραμμικών γεννητριών και την ταυτοποίηση μη γραμμικών συστημάτων. Οι προτεινόμενοι αλγόριθμοι ισχύουν σε οποιοδήποτε σώμα, άρα και στους πραγματικούς αριθμούς και άρα μπορούν να εφαρμοστούν και για την περιγραφή του ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος.

Κατά τη μελέτη των προκλητών δυναμικών χρησιμοποιήσαμε το μη γραμμικό ενεργειακό τελεστή για την ανάδειξη της δραστηριότητας στη γάμμα ζώνη (40Hz - υψηλές συχνότητες) στα προκλητά δυναμικά που υπολογίζονται με την κλασική μέθοδο της μέσης κυματομορφής. Οι καταγραφές αφορούσαν ένα οπτικοκινητικό πείραμα τριών παραλλαγών κατά το οποίο οι συμμετέχοντες έπρεπε να αποφασίσουν, με βάση το σχήμα του στόχου, να εκτελέσουν είτε μια σακκαδική κίνηση προς ένα οπτικό στόχο (προσακκαδική) είτε μια σακκαδική κίνηση στην αντίθετη κατεύθυνση από το στόχο (αντισακκαδική) είτε να μην εκτελέσουν καμία κίνηση. Παρατηρήσαμε την ύπαρξη σημαντικής διαφοροποίησης ως προς τη δραστηριότητα των υψηλών συχνοτήτων ανάμεσα στα είδη κίνησης. Η διαφοροποίηση αυτή συμβαίνει στα 100msec μετά την εμφάνιση του στόχου. Η προσακκαδική κίνηση είναι το μόνο είδος κίνησης που παρουσίασε μια σταθερή σημαντική δραστηριότητα στη γάμμα ζώνη που ακολουθεί την εμφάνιση του στόχου. Το αποτέλεσμα αυτό που χαρακτηρίζει το συγκεκριμένο είδος κίνησης παρατηρείται μόνο στη γάμμα ζώνη και μόνο για τη δραστηριότητα ως προς το ερέθισμα και δεν εμφανίζεται σε καμία άλλη ζώνη συχνοτήτων. Επιπλέον, δεν παρατηρήθηκε καμία διαφορά στη δραστηριότητα των 40Hz ως προς την κίνηση μεταξύ της προσακκαδικής και της αντισακκαδικής κίνησης. Οι συγκεκριμένες διαφορές στη δραστηριότητα ως προς το ερέθισμα των 40Hz μεταξύ των τριών ειδών κίνησης πρέπει να συσχετιστούν με τα συγκεκριμένα ειδικά χαρακτηριστικά κάθε είδους κίνησης. Αυτή η δραστηριότητα των 40Hz ως προς το ερέθισμα που παρατηρείται στην προσακκαδική κίνηση 100msec μετά την εμφάνιση του ερεθίσματος, εμφανίζει κεντρο-βρεγματική κατανομή με έμφαση στο δεξί ημισφαίριο. Το σήμα αυτό μπορεί να αντανακλά την επεξεργασία στο βρεγματικό φλοιό ενός μετασχηματισμού του οπτικού ερεθίσματος σε κινητική απάντηση. Τα ειδικά χαρακτηριστικά της δραστηριότητας αυτής ως προς το χρόνο (μετά την εμφάνιση του ερεθίσματος) και ως προς το είδος της απόκρισης (προσακκαδική κίνηση), παρόλο που δεν είναι πλήρως εξηγήσιμα ως προς το συμπεριφορικό αποτέλεσμα, είναι εξαιρετικά ενδιαφέροντα και συνιστούν περαιτέρω διερεύνηση του σήματος αυτού και της σημαντικότητάς του ως μέσο της μελέτης των γρήγορων οπτικοκινητικών μετασχηματισμών. Επίσης, περαιτέρω διερεύνηση πρέπει να γίνει στη συμπεριφορά των μονήρων καταγραφών και στη μελέτη της μεταβλητότητάς τους σε σχέση και με τις ισχύουσες πειραματικές συνθήκες κάθε καταγραφής.

Με βάση τα παραπάνω, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι μη γραμμικές τεχνικές και αλγόριθμοι επεξεργασίας των ΗΕΓ σημάτων συνιστούν ένα εξαιρετικά χρήσιμο και ελπιδοφόρο εργαλείο στην ανάλυση τους. Ωστόσο, πρέπει να καταβληθεί ακόμη πάρα πολύ μεγάλη ερευνητική προσπάθεια στην κατεύθυνση αυτή, ώστε να επιβεβαιωθούν τα υπάρχοντα και να προκύψουν και νέα αποτελέσματα που θα είναι ιδιαίτερα αξιοποιήσιμα από την ιατρική επιστημονική κοινότητα για διαγνωστικούς και θεραπευτικούς σκοπούς. Ο πλούτος των παρεχόμενων πληροφοριών από τα μη γραμμικά συστήματα και τα μέχρι τώρα αποτελέσματα της εφαρμογής τους στο ΗΕΓ ενθαρρύνουν τη συνέχιση των ερευνητικών προσπαθειών στην κατεύθυνση αυτή.

Βιβλιογραφία

- [1] Abarbanel H.D.I., "Analysis of observed chaotic data", *Springer*, 1996.
- [2] Aeyels D., "Generic observability of differentiable systems", *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 19, pp. 595-603, 1981.
- [3] Akaike H., "A new look at the statistical model identification", *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. AC-19, pp. 716-723, 1974.
- [4] Akay M., "Time Frequency and Wavelets in Biomedical Signal Processing", *New York: IEEE Press*, 1998.
- [5] Andersen R., "Visual and eye movement functions of the posterior parietal cortex", *Ann. Rev. Neurosc.*, vol.12, pp. 377-403, 1989.
- [6] Andersen R., Snyder L.H., Bradley D.C., and Xing J., "Multimodal representation of space in the posterior parietal cortex and its use in planning movements", *Ann. Rev. Neurosc.*, vol. 20, pp. 303-330, 1997.
- [7] Babloyantz A. and Destexhe A., "Low-dimensional chaos in an instance of epilepsy", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, vol. 83, pp. 3513-3517, 1986.
- [8] Barahona M. and Poon C.S., "Detection of nonlinear dynamics in short, noisy time series", *Nature*, vol. 381, pp. 215-217, May 1996.
- [9] Berger H., "Über das Elektrenkephalogramm des Menschen", *Arch. Psychiat. Nervenkr.*, vol. 87, pp. 527-570, 1929.
- [10] Berlekamp E.R., "Algebraic Coding Theory", *New York:McGraw-Hill*, 1968.
- [11] Blahut R., "Theory and Practice of Error Control Codes", *Addison Wesley*, 1984.
- [12] Blanco S., Garcia H., Quian R., Romanelli L. and Rosso O.A., "Stationarity of the EEG Series", *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, vol. 14, pp. 395-399, 1995.
- [13] Brody D.A., Terry F.H. and Ideker R.E., "Eccentric dipole in a spherical medium:generalised expression for surface potentials", *IEEE Trans. on Biomed. Engineering*, vol. BME-20, pp.141-143, 1973.
- [14] Brown J.W. and Hecanen H., "Lateralization and language representation", *Neurology*, vol. 26, pp. 183-189, 1976.
- [15] Brown R., Bryant P. and Abarbanel H.D.I., "Computing the Lyapunov spectrum of a dynamical system from an observed time series", *Physical Review A*, vol. 43, no. 6, pp. 2787-2806, March 1991.

- [16] Buchner H., Gobbele R., Waberki T.D., Wagner M. and Fuchs M., "Evidence for independent thalamic and cortical sources involved in the generation of the visual 40Hz response in humans", *Neurosc. Lett.*, vol. 269, pp. 59-62, 1999.
- [17] Cao L., "Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series", *Physica D*, vol. 110, pp. 43-50, 1997.
- [18] Casdagli M.C., Iasemidis L.D., Sachellares J.C., Roper S.N., Gilmore R.L. and Savit R.S., "Characterizing nonlinearity in invasive EEG recordings from temporal lobe epilepsy", *Physica D*, vol. 99, pp. 381-399, 1996.
- [19] Casdagli M.C., Iasemidis L.D., Savit R.S., Gilmore R.L., Roper S.N. and Sachellares J.C., "Non-linearity in invasive EEG recordings from patients with temporal lobe epilepsy", *Electroenceph. and Clinical Neurophysiology*, vol. 102, pp. 98-105, 1997.
- [20] Chen C.T., "Linear system theory and design", *HRW Series in Electrical and Computer Engineering*, 1984.
- [21] Coifman R.R. and Wickerhauser M.V., "Entropy-based algorithms for best basis selection", *IEEE Trans. Inform Theory*, vol. 38, pp. 713-718, March 1992.
- [22] Daubechies I., "Ten lectures on wavelets", SIAM, 1992.
- [23] De Weerd J.P.C "A-posteriori time-varying filtering of averaged evoked potentials, I. Introduction and conceptual basis", *Biol. Cybernetics*, vol. 41, pp.211-222, 1981.
- [24] De Weerd J.P.C and Kap J.I., "A-posteriori time-varying filtering of averaged evoked potentials, II. Mathematical and computational aspects", *Biol. Cybernetics*, vol. 41, pp.223-234, 1981.
- [25] Devinski O. "Behavioral Neurology 100 Maximum Series", *Edward Arnold*, pp. 88-89, 1991.
- [26] Ding M., Grebogi C., Ott E., Sauer T. and Yorke J.A., "Estimating correlation dimension from a chaotic time series: when does plateau onset occur?", *Physica D*, vol. 69, pp. 404-424, 1993.
- [27] Ding M., Grebogi C., Ott E. and Sauer T., "Plateau onset for correlation dimension - when does it occur?" *Physical Review Letters*, vol. 70, pp. 3872-3875, 1993.
- [28] Eckmann J.-P., Oliffson Kamphorst S., Ruelle D. and Ciliberto S., "Lyapunov exponents from time series", *Physical Review A*, vol. 34, no. 6, pp. 4971-4979, December 1986.
- [29] Eckmann J.-P. and Ruelle D., "Ergodic theory of chaos and strange attractors", *Reviews of Modern Physics*, vol. 57, pp. 617, 1985.
- [30] Eckmann J.P. and Ruelle D., "Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems", *Physica D*, vol. 52, pp. 185-187, 1992.
- [31] Evdokimidis I., Liakopoulos D., Constantinidis T.S. and Papageorgiou C., "Cortical potentials with antisaccades", *Electroenceph. Clin. Neurophysiol.*, vol. 98, pp. 377-384, 1996.
- [32] Evdokimidis I., Mergner T. and Lucking C.H., "Dependence of presaccadic cortical potentials on the type of saccadic eye movements", *Electroenceph. Clin. Neurophysiol.*, vol. 83, pp. 179-191, 1992.

- [33] Feinstein A.R., "Permutation tests and statistical significance", in *Clinical Biostatistics*, pp. 287-304, Saint Louis: C.V. Mosby, 1977.
- [34] Fell J., Roschke J., Mann K. and Schaffer C., "Discrimination of sleep stages: a comparison between spectral and nonlinear EEG measures", *Electroenc. and Clin. Neurophys.*, vol. 98, pp. 401-410, 1996.
- [35] Feng G.L. and Tzeng K.K., "A generalization of the Berlekamp-Massey algorithm for multisequence shift-register synthesis with applications to decoding cyclic codes", *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. 37, no. 5, pp. 1274-1287, Sep. 1991.
- [36] Frank G.W., Lookman T., Nerenberg M.A.H., Essex C., Lemieux J. and Blume W., "Chaotic Time Series Analysis of Epileptic Seizures", *Physica D*, vol. 46, pp. 427-438, 1990.
- [37] Fraser A.M. and Swinney H., "Independent Coordinates for Strange Attractors from Mutual Information", *Phys. Rev. A*, vol. 33, pp. 1134-1140, 1986.
- [38] Gasser T., Mocks J. and Verleger R., "SELVCO: a method to deal with trial-to-trial variability of evoked potentials", *Electroenceph. Clin. Neurophysiology*, vol. 55, pp. 717-723, 1983.
- [39] Gatzonis S., Linardatos D., Mantouvalos V., Sifakas A. and Papageorgiou C., "Dimensionality estimation of adult normal human EEG", *Electroenceph. and Clin. Neurophysiol., Special Issue: Abstracts of the 14th International Congress of EEG and Clinical Neurophysiology*, Florence, Italy, vol. 103, pp. 158, 1997.
- [40] Gevins A., Le J., Leong H., McEvoy K. and Smith M., "Deblurring", *Journal of Clinical Neurophysiology*, vol. 16, no. 3, pp. 204-213, 1999.
- [41] Gevins A.S., Brickett P., Costales B., Le J. and Reutter B., "Beyond topographic mapping: towards functional-anatomical imaging with 124-channel EEGs and 3-D MRIs", *Brain Topography*, vol. 3, no. 1, pp.53-64, 1990.
- [42] Gevins A.S. and Remond A., "Methods of analysis of brain electrical and magnetic signals", *Handbook of Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier 1987.
- [43] Glentis G-O., Koukoulas P. and Kalouptsidis N., "Efficient algorithms for Volterra system identification", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 47, n. 11, pp.3042-3057, November 1999.
- [44] Gnadt J.W. and Andersen R.A., "Memory related motor activity in posterior parietal cortex of the macaque", *Experimental Brain Research*, vol. 70, pp. 216-220, 1998.
- [45] Gottlieb J. and Goldberg M.E., "Activity of neurons in the lateral intraparietal area of the monkey during an antisaccade task", *Nat Neurosci*, vol. 2, pp. 906-912, 1999.
- [46] Graf K.E. and Elbert T., "Dimensional analysis of the waking EEG. In: Basar E. and Bullock Th. Editors", *Brain Dynamics Progress and Perspectives*, Berlin: Springer-Verlag, pp. 174-191, 1989.
- [47] Grass A.M. and Gibbs F.A., "A Fourier transform of the electroencephalogram", *J. Neurophysiol.*, vol. 1, pp. 521, 1938.
- [48] Grassberger P., "An optimized box-assisted algorithm for fractal dimensions", *Phys. Lett. A*, vol. 148, pp. 63-68, 1990.

- [49] Grassberger P. and Proccacia I., "Measuring the strangeness of strange attractors", *Physica D*, vol. 9, pp. 189-208, 1983.
- [50] Grassberger P. and Procaccia I., "Characterization of strange attractors", *Phys. Rev. Letters*, vol. 50, pp. 346-349, 1983.
- [51] Guitton D., Buchtel H.A. and Douglas D.A., "Frontal lobe lesions in man cause difficulties in suppressing reflexive glances and in generating goal-directed saccades", *Exp. Brain. Res.*, vol. 58, pp. 455-472, 1985.
- [52] Hinich M.J., "Testing for Gaussianity and linearity of a stationary time series", *J. Time Series Analysis*, vol. 3, pp. 169-176, 1982.
- [53] Hoekstra B.P.T., Diks C.G.H., Allesie M.A. and DeGoede J., "Nonlinear analysis of epicardial atrial electrograms of electrically induced atrial fibrillation in man", *J. Cardiovasc. Electrophysiol.*, vol. 6, pp. 419-440, 1995.
- [54] Iasemidis L.D., Sackellares J.C., Zaveri H.P. and Williams W.J., "Phase space topography and the Lyapunov exponent of electrocorticograms in partial seizures", *Brain Topogr.*, vol. 2, pp. 187-201, 1990.
- [55] Imamura K. and Yoshida W., "A single derivation of the Berlekamp-Massey algorithm and some applications", *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. IT-33, no.1, pp.146-150, Jan. 1987.
- [56] Jasper H.H., "The ten-twenty electrode system of the International Federation", *Electroencephalography and Clin. Neurophysiology*, vol. 10, pp. 371-375, 1958.
- [57] Jelles B., van Birgelen J.H., Slaets J.P.J., Hekster R.E.M., Jonkman E.J. and Stam C.J., "Decrease of nonlinear structure in the EEG of Alzheimer patients compared to the healthy controls", *Clinical Neurophysiology*, vol. 110, pp. 1159-1167, 1999.
- [58] Jeong J., Kim S.Y. and Han S., "Non-linear dynamical analysis of the EEG in Alzheimer's disease with optimal embedding dimension", *Electroenc. and. Clinical. Neurophys.*, vol. 106, pp. 220-228, 1998.
- [59] Kaiser J.F., "On a simple algorithm to calculate the energy of a signal", in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustic Speech and Signal Processing*, pp. 381-384, April 1990.
- [60] Kalouptsidis N., "Signal processing systems: Theory and Design", *John Wiley & Sons, Inc.*, 1997.
- [61] Kaplan D.T. and Glass L., "Divert test for determinism in a time series", *Physical Review Letters*, vol. 68, pp. 427-429, 1992.
- [62] Kaplan J. and Yorke J., "Chaotic behaviour of multidimensional difference equations", in *Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points*, edited by H. O. Peitgen and H. O. Walther. Lecture notes in Mathematics, vol. 730, p. 219, New York, Springer-Verlag.
- [63] Kawashima R., Kazunori S., Hiroshi I., Shuichi O., Furumoto S., Gotoh R., Koyama M., Yoshioka S., Takahashi T., Takahashi K., Yanagisawa T. and Fukuda H., "Functional anatomy of GO/NOGO discrimination and response selection - a PET study in man", *Brain Res.* vol. 728, pp. 79-89, 1996.

- [64] Kennel M.B., Brown R. and Abarbanel H.D.I., "Determining minimum embedding dimension using a geometrical construction", *Physical Review A*, vol. 45, pp. 3403-3411, 1992.
- [65] Koukou M., Lehmann D., Wackermann J., Dvorak I. and Henggeler B. "Dimensional complexity of EEG brain mechanisms in schizophrenia", *Biol. Psychiat.*, vol. 242, pp. 191-196, 1992.
- [66] Lehnertz K. and Elger CE., "Spatio-temporal dynamics of the primary epileptogenic area in temporal lobe epilepsy characterized by neuronal complexity loss", *Electroenceph. Clin. Neurophysiol.*, vol. 95, pp. 108-117, 1995.
- [67] Linardatos D. and Gatzonis S., "Testing the presence of nonlinearities in EEG signals", *Poster Session of the III International Summer School of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, Certosa di Pontignano, Siena, Italy, June 1999.
- [68] Linardatos D. and Gatzonis S., "EEG: chaos or noise?", *3rd Panhellenic Conference of Nonlinear Dynamics*, Xanthi, July 1995.
- [69] Linardatos D., Gatzonis S., Kalabokidou I., Kalouptsidis N., Mantouvalos B. and Papageorgiou C., "Software Development for Artifact Rejection in EEG", *14th Panhellenic Neurology Conference*, Athens, November 1995.
- [70] Linardatos D., Gatzonis S., Kalabokidou I., Kalouptsidis N., Mantouvalos B. and Papageorgiou C., "Software Development for Artifact Detection and Rejection in EEG", *Issues of Neurology*, vol. 2, n. 29, 1996.
- [71] Linardatos D. Gatzonis S., Kalouptsidis N., Mantouvalos V., Sifakas A. and Papageorgiou C., "Calculation of the spectrum of Lyapunov exponents in EEG", *Epilepsia*, vol. 37, supplement 4, pp. 154, presented in the 2nd European Conference of Epileptology, the Hague, the Netherlands, September 1996.
- [72] Linardatos D., Gatzonis S., Stamelos P., Kalouptsidis N., Mantouvalos B. and Papageorgiou C., "Estimation of the largest Lyapunov exponent in EEG", *14th Panhellenic Neurology Conference*, Athens, November 1995.
- [73] Linardatos D., Gatzonis S., Stamelos P., Kalouptsidis N., Mantouvalos B. and Papageorgiou C., "Estimation of Lyapunov exponents in EEG", *Issues of Neurology*, vol. 2, n. 27, 1996.
- [74] Linardatos D., Gatzonis S., Velis D. N., Mantouvalos V. and Sifakas A., "Patterns of right-handed and left-handed normal human subjects based on correlation dimension estimates of scalp EEG recordings", submitted to *Journal of Clinical Neurophysiology*.
- [75] Linardatos D. and Kalouptsidis N., "Synthesis of minimal cost nonlinear feedback shift registers", revised and resubmitted in *Signal Processing*.
- [76] Linardatos D. and Kalouptsidis N., "A new estimator of correlation dimension based on correlation function differences", *under preparation*
- [77] Ljung L., "System Identification", *Prentice Hall*, 1987.
- [78] Llinas R. and Ribary U., "Coherent 40-Hz oscillations characterizes dream state in human", *Proc. Nat. Acad. Sc. USA*, vol. 90, pp. 2078-2081, 1993.

- [79] Lopes da Silva F.H., Hoeks A., Smiths A. and Zetterberg L.H., "Model of brain rhythmic activity", *Kybernetik*, vol. 15, pp. 27-37, 1974.
- [80] Lutzenberger W., Birbaumer N., Flor H., Rockstroh B. and Elbert T. "Dimensional analysis of the human EEG and intelligence", *Neuroscience Letters*, vol. 143, pp. 10-14, 1992.
- [81] Maragos P., Kaiser J.F. and Quatieri T.F. "Energy Separation in Signal Modulations with application to speech analysis". *IEEE Trans on Signal Processing*, vol. 41, pp. 3024-3051, October 1991.
- [82] Martinerie J., Adam C., le van Quyen M., Baulac M., Clemenceau S., Renault B. and Varela F.J., "Epileptic seizures can be anticipated by nonlinear analysis", *Nature Medicine*, vol. 4, no. 10, pp. 1173-1176, 1998.
- [83] Massey J.L., "Shift register synthesis and BCH decoding", *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol.IT-15, pp. 122-127, Jun. 1969.
- [84] Mazzoni P., Bracewell R.M., Barash S. and Andersen R.A., "Spatially tuned auditory responses in area LIP of macaques performing delayed memory saccades to acoustic targets", *J. Neurophysiol.*, vol. 75, pp. 1233-1241, 1996.
- [85] Misiti M., Misiti Y., Oppenheim G. and Poggi J.M., "Wavelet Toolbox: For use with MATLAB, Wavelet Toolbox User's Guide", 1996.
- [86] Mountcastle V.B., Lynch J.C., Georgopoulos A., Sakata H. and Acuna C. "Posterior parietal association cortex of the monkey: command functions for operations within extrapersonal space", *J Neurophysiol*, vol. 38, pp. 871-908, 1975.
- [87] Mukhopadhyay S. and Ray G.C., "A New Interpretation of Nonlinear Energy Operator and Its Efficacy in Spike Detection", *IEEE Trans. on Biomed. Engineering*, vol. 45, no. 2, pp. 180-187, February 1998.
- [88] Nerenberg M.A.H. and Essex C., "Correlation Dimension and systematic geometric effects", *Phys. Rev. A.*, vol. 42, pp. 7065-7074, 1990 .
- [89] Nikias C.L. and Petropoulou A.P., "Higher-order spectra analysis", *Prentice Hall*, 1993.
- [90] Nunez L. Paul, "Neocortical dynamics and human EEG rhythms", *Oxford University Press*, 1995.
- [91] Osborne A.R. and Provenzale A., "Finite correlation dimension for stochastic systems with power-law spectra", *Physica D*, vol. 35, pp. 357-381, 1981.
- [92] Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D. and Shaw R.S., "Geometry from a time series", *Phys. Rev. Lett*, vol. 45, pp. 712-715, 1981.
- [93] Palus M., "Nonlinearity in normal human EEG: cycles, temporal asymmetry, nonstationarity and randomness not chaos", *Biol. Cybern.*, vol. 75, pp. 389-396, 1996.
- [94] Pantev C., Makeig S., Hoke M., Galambos R., Hampson S. and Gallen C., "Human auditory evoked gamma-band magnetic fields", *Proc. Nat. Acad.Sc. USA*, vol. 88, pp. 8996-9000, 1991.
- [95] Pezard L., Lachaux J.P., Thomasson N. and Martinerie J., "Why bother to spatially embed EEG?", *Psychophysiology*, vol. 36, pp. 527-531, 1999.

- [96] Pfurtscheller G., Flotzinger D. and Neuper C., "Differentiation between finger, toe and tongue movement in man based on 40Hz EEG", *Electroenceph. Clin. Neurophysiol.*, vol. 90, pp. 456-460, 1994.
- [97] Pijn J.P., Neerven J.V., Noest A. and Lopes da Silva F.H., "Chaos or noise in EEG signals? dependence on state and brain site", *Electroencephal. and Clinical Neurophys.*, vol. 99, pp. 371-381, 1991.
- [98] Pincus S.M., Gladstone I.M. and Ehrenkranz R.A., "A regularity statistic for medical data analysis", *J. Clin. Monit.*, vol. 7, pp. 335-345, 1991.
- [99] Pritchard W.S., Duke D.W. and Kriehle K.K., "Dimensional analysis of resting human EEG II: surrogate data testing indicates nonlinearity but not low-dimensional chaos", *Psychophysiology*, vol. 32, pp. 486-491, 1995.
- [100] Pritchard W.S., Kriehle K.K. and Duke D.W., "On the validity of estimating EEG correlation dimension from spatial embedding", *Psychophysiology*, vol. 33, pp. 362-368, 1996.
- [101] Pritchard W.S., "On the validity of spatial embedding: a reply to Pezard et al", *Psychophysiology*, vol. 36, pp. 532-535, 1999.
- [102] Rolls E.T. and Tovee M.J., "Processing speed in the cerebral cortex and the neurophysiology of visual masking", *Proc. R. Soc. Lond.*, vol. 257, pp. 9-15, 1994.
- [103] Rombouts S.A.R.B., Keunen R.W.M. and Stam C.J., "Investigation of nonlinear structure in multichannel EEG", *Phys. Lett. A*, vol. 202, pp. 352-358, 1995.
- [104] Rosenstein M.T., Collins J.J. and De Luca C.J., "A Practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets", *Physica D*, vol. 65, pp. 117-134, 1993.
- [105] Rosenstein M.T., Collins J.J. and De Luca C.J., "Reconstruction expansion as a geometry-based framework for choosing proper delay times", *Physica D*, vol. 73, pp. 82-98, 1994.
- [106] Ruelle D., "Deterministic chaos: the science and the fiction", *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 427, pp. 241, 1990.
- [107] Sakata S., "Finding a minimal set of linear recurring relations capable of generating a given finite two-dimensional array", *J. Symbolic Computation*, vol. 5, pp. 321-337, 1988.
- [108] Sakata S., "Extension of the Berlekamp-Massey algorithm to N-dimensions", *Inform. Computation*, vol. 84, pp. 207-239, 1989.
- [109] Sano M. and Sawada Y., "Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series", *Physical Review Letters*, vol. 55, no. 10, pp. 1082-1085, September 1985.
- [110] Sauer T., Yorke J.A. and Cadaghi M., "Embedology", *Journal of Statistical Physics*, vol. 65, nos. 3/4, 579-616, 1991.
- [111] Savit R., Green M., "Time series and dependent variables", *Physica D*, vol. 50, pp. 95-116, 1991.
- [112] Shibata T., Shimoyama I., Ito T., Abila D., Iwasa H., Koseki K., Yamanouchi N., Sato T. and Nakajima Y., "Event-related dynamics of the gamma-band oscillation in the human brain: information processing during a GO/NOGO hand movement task", *Neurosci. Res.*, vol. 33, pp. 215-22, 1999.

- [113] Singer W. and Gray C.M., "Visual feature integration and the temporal correlation hypothesis", *Ann. Rev. Neurosci.*, vol. 18, pp. 555-586, 1995.
- [114] Skrandies W. and Anagnostou E., "Electroencephalographic cortical oscillations and saccadic eye movements in humans", *Neurosci. Lett.*, vol. 261, pp.57-60, 1999.
- [115] Smyrnis N., Linardatos D., Evdokimidis I., Constantinidis T.S. and Stefanis C.N., "An early transient 40Hz activity discriminate a following pro-saccade from a no-move and anti-saccade choice", *Exp. Brain Res.*, vol. 139, pp. 287-296, 2001.
- [116] Snyder L.H., Batista A.P. and Andersen R.A., "Coding of intention in the posterior parietal cortex", *Science*, vol. 386, pp. 167-170, 1997.
- [117] Stam C.J., van Woerkom T.C.A.M. and Pritchard W.S., "Use of nonlinear EEG measures to characterize EEG changes during mental activity", *Electroenceph. Clin. Neurophysiology*, vol. 99, pp. 214-224, 1996.
- [118] Stam C.J., Pijn J.P.M., Suffczynski P. and Lopes da Silva F.H., "Dynamics of the human alpha rhythm: evidence for nonlinearity?", *Clin. Neurophysiol.*, vol. 110, pp. 1801-1813, 1999.
- [119] Subirana A., "Handedness and cerebral dominance", in: *Vinken PJ and GW Bruyn, editors, Handbook of Clinical Neurology*, vol. 4, pp. 248-272, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969.
- [120] Takens F., "Estimation of dimension and order of time series", *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, vol. 17, Birkhauser Verlag, Basel Switzerland, 1996.
- [121] Takens F., "Detecting strange attractors in turbulence", *Dynamical systems and turbulence, Lectures Notes in Mathematics*, ed. D.A.Rand and L.S.Young, Springer Verlag, 898, pp. 365-381, New York, 1981.
- [122] Takens F., "On the numerical determination of the dimension of an attractor", in *Braksmas B.L.J., Broer H.W. & Takens F., editors Dynamical systems and Bifurcations: Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag*, pp. 99-106, 1984.
- [123] Tallon-Baudry C. and Bertrand O., "Oscillatory gamma activity in humans and its role in object representation", *Trends Cognit. Sc.*, vol. 3, pp. 151-158, 1999.
- [124] Tallon-Baudry C., Bertrand O., Deluech C. and Pernier J., "Stimulus specificity of the phase-locked and non-phase-locked 40Hz visual responses in human", *J. Neurosci.*, vol. 16, pp. 4240-4249, 1996.
- [125] Theiler J., "Efficient algorithm for estimating the correlation dimension from a set of discrete points", *Phys. Rev. A*, vol. 36, pp. 4456-4462, 1987.
- [126] Theiler J., "Spurious dimension from correlation algorithms applied to limited time-series data", *Phys. Rev. A*, vol. 34, pp. 2427-2433, 1986.
- [127] Theiler J., Eubank S., Longtin A., Galdrikian B. and Farmer J.D., "Testing for non-linearity in time series: the method of surrogate data", *Physica D*, vol. 58, pp. 77-94, 1992.

- [128] Theiler J., Linsay P.S. and Rubin D.M., "Detecting non-linearity in data with long coherence times", in *Weigend A. and Gershenfeld N. editors, Time Series Prediction*, Addison-Wesley, Reading, MA., pp. 429-458, 1993.
- [129] Theiler J. and Lookman T., "Statistical error in a chord estimator of correlation dimension: the 'rule of five'", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 3, no. 3, pp. 765-771, 1993.
- [130] Theiler J. and Rapp P.E. "Re-examination of the evidence for low-dimensional nonlinear structure in the human electroencephalogram", *Electroenceph. Clin. Neurophys.*, vol. 98, pp. 213-222, 1996.
- [131] Thickbroom G.W. and Mastaglia F.L., "Presaccadic spike potential: investigation of topography and source", *Brain Res.*, vol. 339, pp. 271-280, 1985.
- [132] Tiitinen H., Sinkkonen K., Reinikainen K., Alho k., Lavikainen J. and Naatanen R., "Selective attention enhances the auditory 40-Hz transient response in humans". *Nature*, vol. 364, pp. 59-60, 1993.
- [133] Tsonis An. A., "Chaos: From Theory to Applications", *Plenum Press*, 1992.
- [134] Vaidyanathan C. and Buckley K., "A sampling theorem for EEG electrode configuration", *IEEE Trans. on Biomed. Engineering*, vol. 44, no. 1, pp. 94-97, 1997.
- [135] Van der Heyden M.J., Velis D.N., Hoekstra B.P.T., Pijn J.P.M., van Emde Boas W., van Veelen C.W.M., van Rijen P.C., Lopes da Silva F.H. and DeGoede J. "Nonlinear analysis of intracranial human EEG in temporal lobe epilepsy", *Clinical Neurophysiology*, vol. 110, pp. 1726-1740, 1999.
- [136] Victor J.D. and Canel A., "A Relation between the Akaike criterion and reliability of parameter estimates with application of nonlinear autoregressive modelling of ictal EEG", *Annals of Biomedical Engineering*, vol. 20, pp. 167-180, 1992.
- [137] Weigend A.S. and Gershenfeld N.A., "Time series prediction: Forecasting the future and understanding the Past", *Addison Wesley Publishing Company*, 1994.
- [138] Whitney H., "Differential manifolds", *Ann. Math*, vol. 37, pp. 645-680, 1936.
- [139] Wolf A., Swift J.B., Swimney L. H. and Vastano A. J., "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series", *Physica D*, vol. 16, pp. 285-317, 1985.